الكلية الجامعية للعلوم التطبيقية

بكالوريوس هندسة

محاضرات في مساق

تفاضل وتكامل

"أ"

الفصل الدراسي الأول

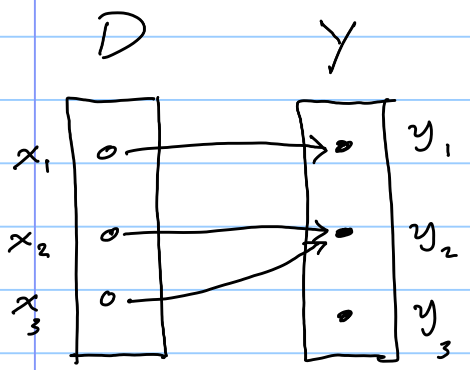
2015م

Ch 1: Functions

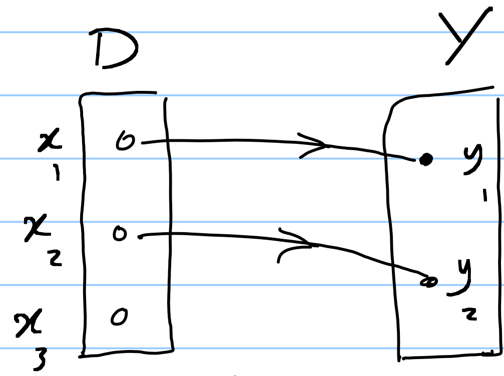
Note Title 12-Sep-11

1.1 Functions and their Graphs

Def: A function (fun) from a set D to a set Y is a rule assigns a unique element $f(x) \in Y$ to each element $x \in D$.

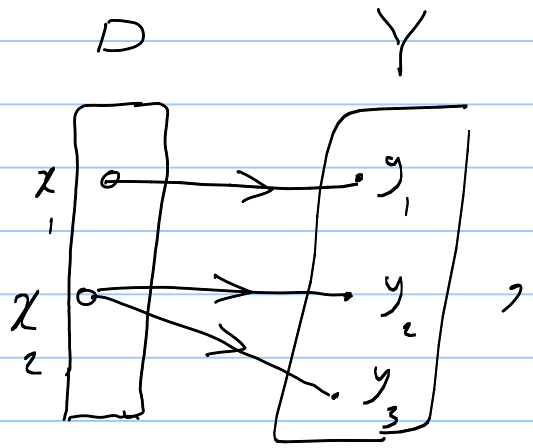


fun

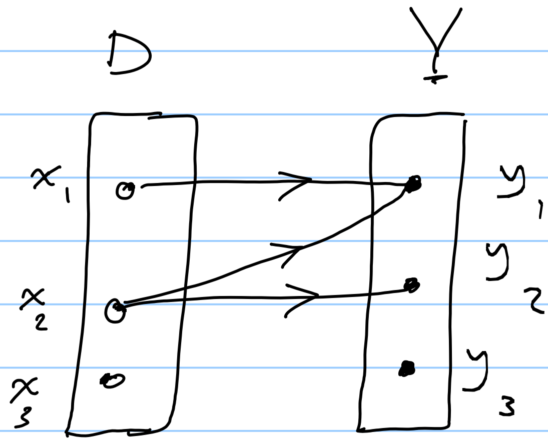


not fun

not fun [~~each~~]



not fun [uniqueness ×]



not fun [each ×, uniqueness ×]

Remarks: 1) The elements in Y are denoted by $f(x)$ or y and the elements in D are denoted by x or t.

2) It is possible to exist $x_1 \neq x_2$ in D such that $f(x_1) = f(x_2)$.

3) The elements in D are independent variables (or input values) and the elements in Y – which are in the image – are dependent variable (or output values).

4) The set D is called the <u>domain</u> of f and denoted by $Dom(f)$. The set Y is called the <u>co-domain</u> of f. The subset of Y that make all images in called the <u>range</u> of f, and denoted by $Ran(f)$. Note that $Ran(f) \subseteq Y$.
[واضح من التعريف أنه ليس بالضرورة كل عنصر في Y يكون من المدى].

5) A fun with domain D and co-domain Y is simply denoted as $f: D \longrightarrow Y$.

Examples: 1) Let $D = \{1, 2, 3, 4\}$ and $Y = \{a, b, c, d\}$. Define $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$ and $f(4) = c$. Then f is a fun from D to Y.

2) Let $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be defined in the rule $f(t) = 2t^2 + 5$. Evaluate f at the input values of $t = 0, 2, x^2, f(0)$.

sol: $f(0) = 2 * 0^2 + 5 = 5$. $\quad f(2) = 2 * 2^2 + 5 = 13$.

$f(x^2) = 2 * (x^2)^2 + 5 = 2x^4 + 5$.

$f(f(0)) = f(5) = 2 * 5^2 + 5 = 55$.

Graphs of Functions:

Def: The <u>graph</u> of a fun $y = f(x)$ in the plane - denoted by $G(f)$ - is the set of all points $p(x, y)$ where x, y are input-output values $(y = f(x))$; that is

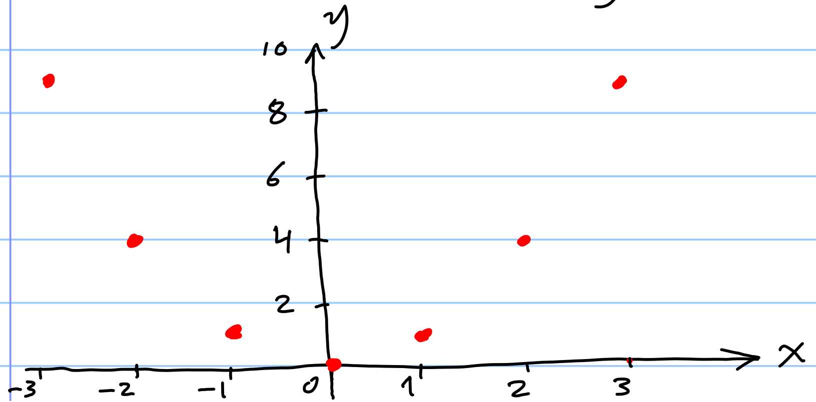
$$G(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

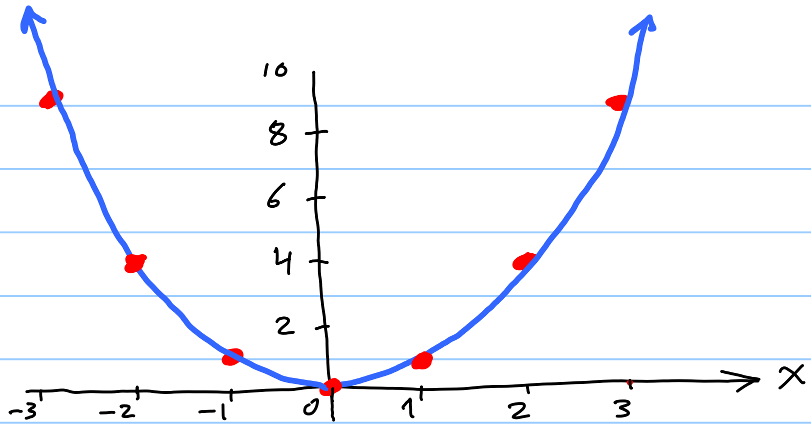
ملحوظة: لرسم بعض الدوال البسيطة، نقوم بعمل جدول لحساب قيم y عند بعض نقاط x ومن ثم نضع نقاط الجدول $p(x, y)$ في المستوى الديكارتي بعدها نقوم بتوصيل هذه النقاط من خلال منحنى أملس.

Example: Graph the fun $y = x^2$.

sol: Make the following table:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

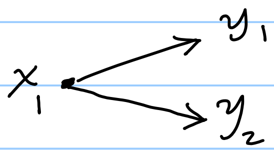


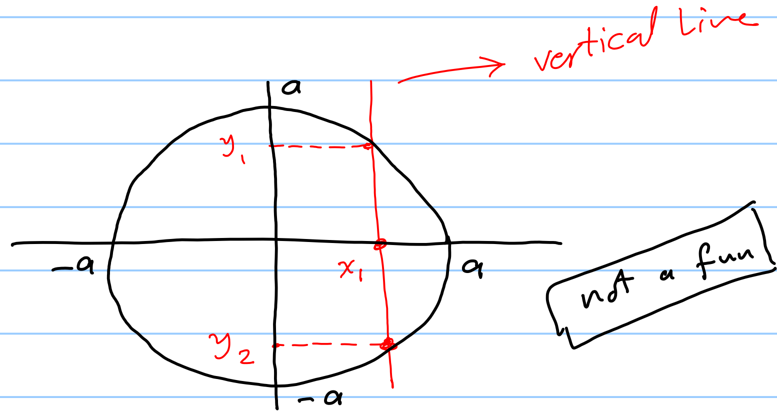


The Vertical Line test for a fun:

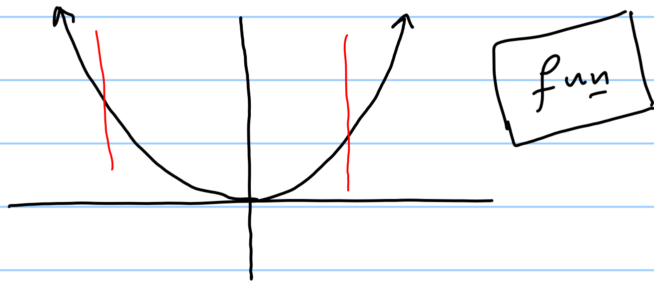
يعتمد هذا الإختبار على حقيقة أنه لا يمكن للخط الرأسي أن يقطع الدالة في أكثر من نقطة واحدة.

1) $x^2 + y^2 = a^2$

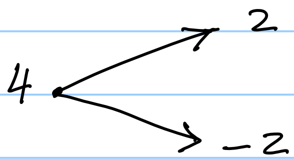


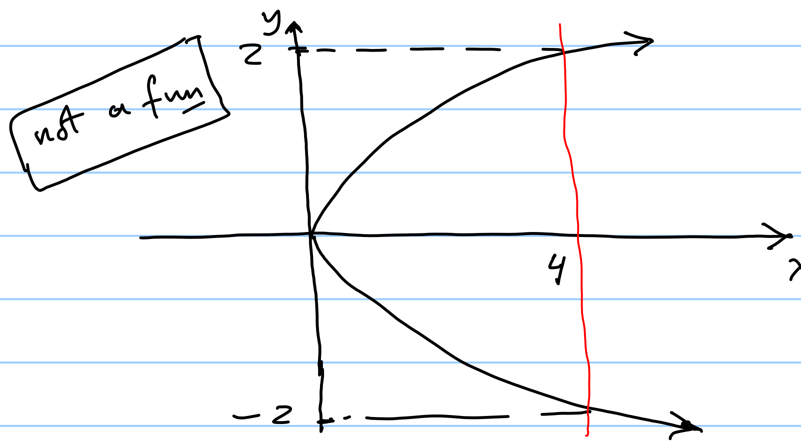


2) $y = x^2$



3) $x = y^2$



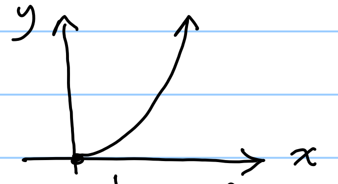


Domain and Range:

Def: If $y = f(x)$ is a fun, then the domain of f - called the natural domain - is the largest subset of $\mathbb{R}$ for which f is well defined (y has real values). The range is the set of all images of the elements of the domain under the rule of f.

Remark: Sometimes, the domain of a fun is given explicity. Moreover, we can restrect the natural domain to smaller set, in this case, we must say so. For example, the fun

$y = x^2 , \quad x \geq 0$



لإيجاد المجال الطبيعي لدالة ما من خلال قانونه يجب أن نأخذ بعين الإعتبار ما يلي:

(1) لا يمكننا القسمة على صفر.

(2) إذا كان n عدد طبيعي زوجي، فإنه لا يمكننا أخذ الجذر النوني لقيم سالبة.

Examples: Find the domain and the range of the following funs:

1) $y = x^2$.

sol: $y = x^2$ is defined $\forall x \in \mathbb{R}$, so $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

لإيجاد المدى عكس الحل بطريقتين، الأولى أخذ بعض قيم x المختلفة، وحساب قيم y المناظرة ومن ثم استنتاج كل قيم y. الطريقة الثانية من خلال قيم x نقوم بتكوين قيم y جبريا (إن أمكن)

حل 1

x	0	-1	1	-2	2	-3	3	...
y	0	1	1	4	4	9	9	...

$Ran(f) = [0, \infty)$.

حل 2 $\quad -\infty < x < \infty \Rightarrow 0 \leq |x| < \infty \Rightarrow 0 \leq x^2 < \infty$

$\Rightarrow 0 \leq y < \infty$. $\therefore Ran(f) = [0, \infty)$.

2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$.

sol: $x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 16 \Rightarrow x \neq \mp 4$.

$\therefore Dom(f) = \mathbb{R} - \{4, -4\}$.

x	0	1	-1	4.1	-4.1	5	-5	...
y								...

$Ran(f) = (-\infty, \infty)$

3) $y = \sqrt{4 - x}$

sol: $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow Dom(f) = (-\infty, 4]$.

To find the range, not that $-\infty < x \leq 4 \Rightarrow$

$\infty > -x \geq -4 \Rightarrow \infty > 4 - x \geq 0 \Rightarrow$

$\infty > \sqrt{4-x} \geq 0$, That is $0 \leq y < \infty$, and hence $Ran(f) = [0, \infty)$.

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Sol: $4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2$
$\Rightarrow -2 < x < 2$. Hence $Dom(f) = (-2, 2)$.

To find the range, note that

$0 \leq |x| < 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 4 \Longrightarrow$

$0 \geq -x^2 > -4 \Longrightarrow 4 \geq 4 - x^2 > 0$

$\Longrightarrow 2 \geq \sqrt{4-x^2} > 0 \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} < \infty \Longrightarrow Ran(f) = [\tfrac{1}{2}, \infty).$$

ملاحظة

$\sqrt{x^2} = |x|$
and $|x| < a$
$\equiv -a < x < a$

حل آخر

x	0	-1	1	-1.9	1.9	-1.99	...
y							...

$\Longrightarrow$

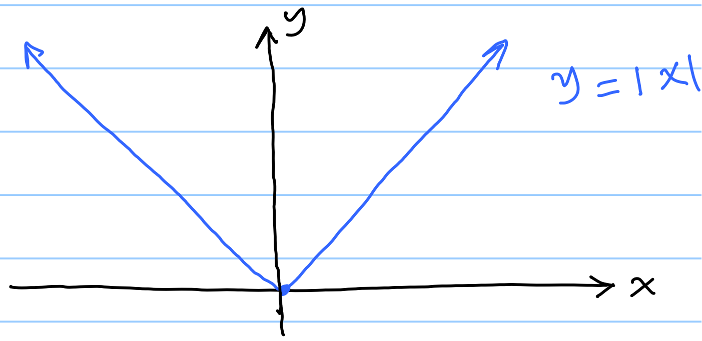
$Ran(f) = [\tfrac{1}{2}, \infty)$.

Piecewise Defined Functions

Sometimes a fun is defined by using different formulas on different parts of its domain.

Examples: 1) (Absolute Value fun)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Ran(f) = [0, \infty)$

$|10| = 10$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$

Remarks: 1) $|x| \geq 0$ and $|x| = 0$ iff $x = 0$.

(2) $|-x| = |x|$.

(3) $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

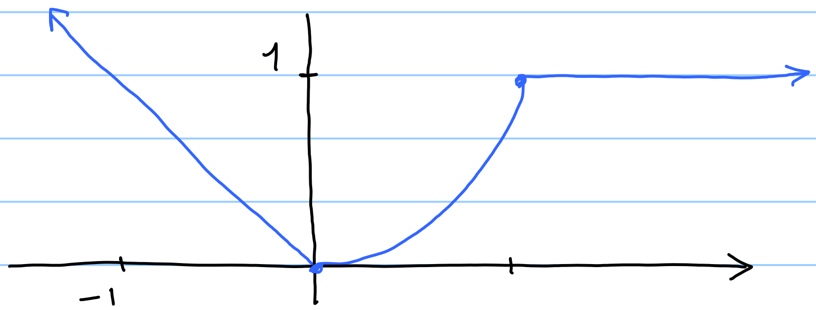
(4) $|xy| = |x||y|$. (5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(6) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (triangle inequality).

(7) Geometrically, $|x-y|$ is the distance between x and y. In particular, $|x|$ is the distance between x and 0.

2) $$f(x) = \begin{cases} -x, & x<0; \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

So, $f(10) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ and $f(-5) = 5$.



3) i) The greatest integer fun $\lfloor x \rfloor$ is the greatest integer less than or equal to x. That is

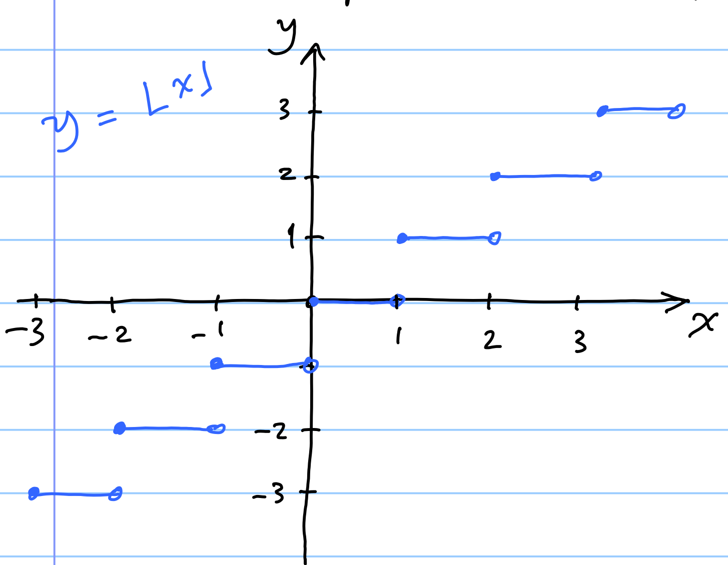
$$f(x) = \lfloor x \rfloor = z, \quad \text{where } z \in \mathbb{Z} \text{ and } z \leq x < z+1.$$

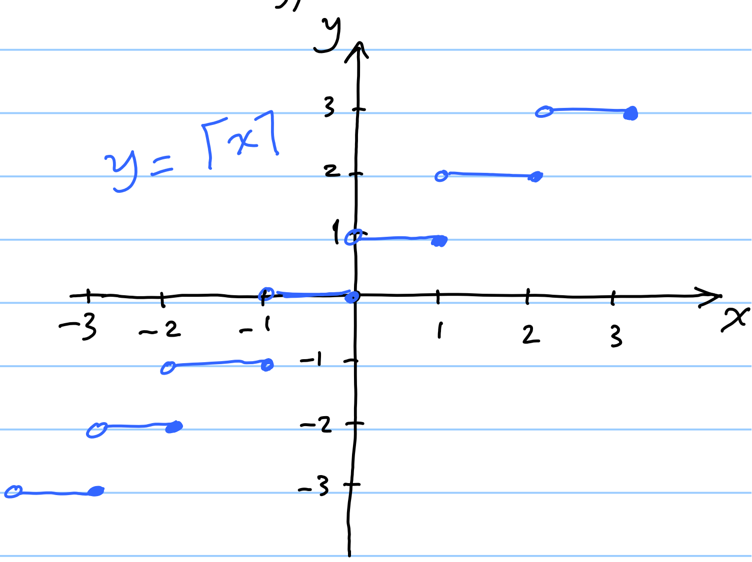
ii) The least integer fun $\lceil x \rceil$ is the least (smallest) integer greater than or equal to x. That is

$$g(x) = \lceil x \rceil = z \quad \text{where} \quad z-1 < x \leq z.$$

Illustration: $\lceil 3.2 \rceil = 4$, $\lfloor 3.2 \rfloor = 3$, $\lceil 3 \rceil = \lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lceil -2.1 \rceil = -2$, $\lfloor -5.5 \rfloor = -6$, and so on.

We can prove that $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor$ iff $a \in \mathbb{Z}$.

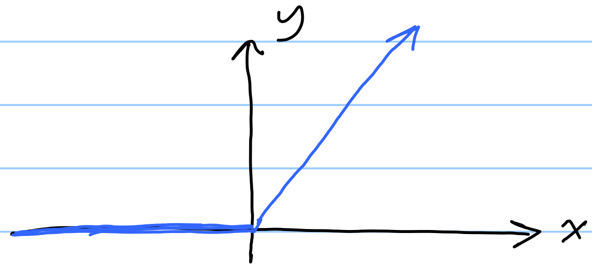




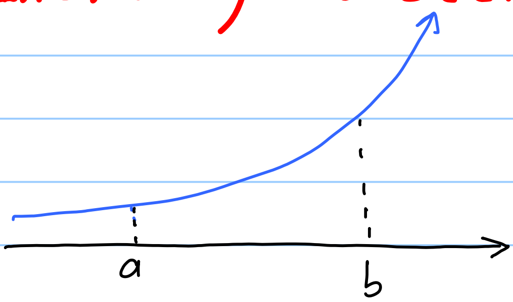
4) Graph the fun $y = x + |x|$.

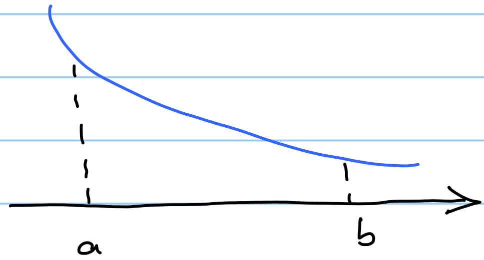
Sol: The fun can be written in the form

$$y = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



Increasing and Decreasing Functions





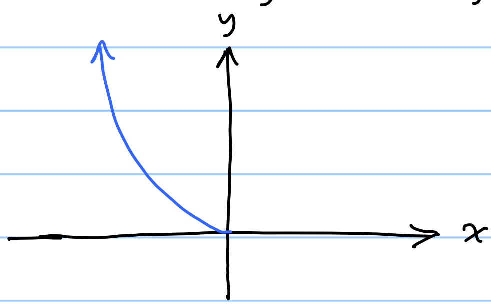
Increasing fun

$a < b$ in $D \Longrightarrow$
$f(a) < f(b)$

Decreasing fun

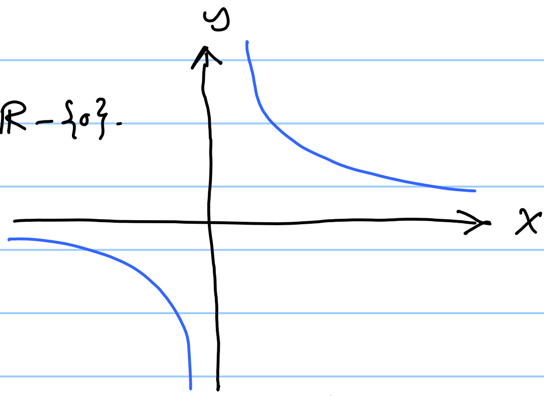
$a < b$ in $I \Longrightarrow$
$f(a) > f(b)$.

Illustration: 1) $y = x^2$, $x \leq 0$ is decreasing fun.



2) $y = \frac{1}{x}$ on $\mathbb{R} - \{0\}$

The fun is neither $\nearrow$ nor $\searrow$ on $\mathbb{R} - \{0\}$.
But it is $\searrow$ on $(-\infty, 0)$ and $\searrow$ on $(0, \infty)$.



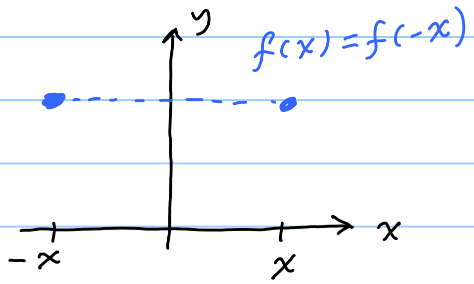
Example: Show that the fun $y = 3x + 2$ is $\nearrow$ fun.

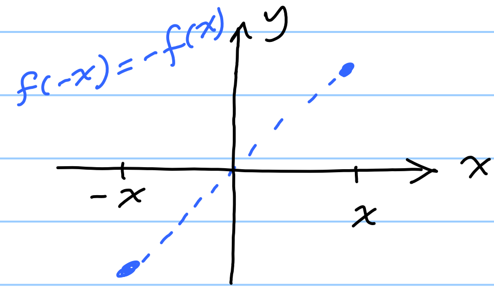
PF: $Dom(f) = \mathbb{R}$, so suppose that $a < b$ in $\mathbb{R}$. Then $3a < 3b$. Hence $3a + 2 < 3b + 2$ or equivalently, $f(a) < f(b)$. This proves that f is $\nearrow$.

Even and Odd Funs; Symmetry

Def: 1) A fun $y=f(x)$ is an even fun if $f(-x)=f(x)$ $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

2) A fun $y=f(x)$ is an odd fun if $f(-x)=-f(x)$ $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.



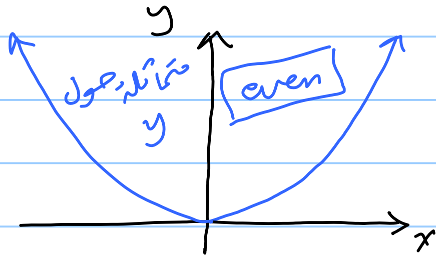


even fun — Symmetric about y-axis

odd fun — Symmetric about origin.

Examples: Determine whether the following funs are even, odd, or neither.

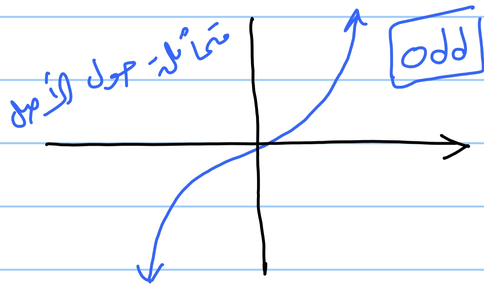
1) $y=x^2$



sol: $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

So it is even fun.

2) $y=2x^3$.



sol: $f(-x)=2(-x)^3=-2x^3$

$=-f(x)$. So the fun is odd.

3) $y=\dfrac{x^3}{|x|+1}$

sol: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{|-x|+1}=\dfrac{-x^3}{|x|+1}=-f(x)$.

So f is odd fun

4) $y=|x-1|$.

sol: $f(-x)=|-x-1|=|-(x+1)|=|x+1|$

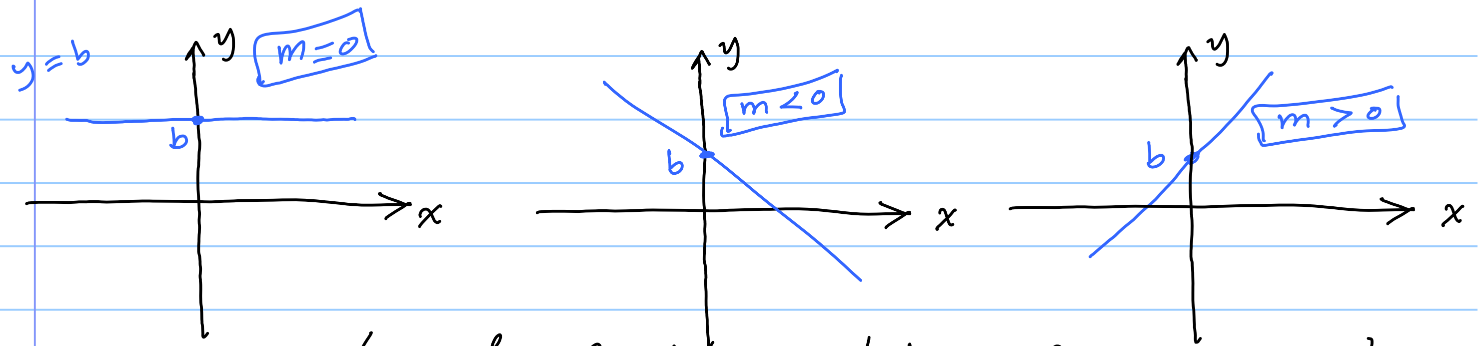
$f(-x)\neq f(x)$ and $f(-x)\neq -f(x)$. So f is neither even nor odd.

Common Functions:

الصورة العامة

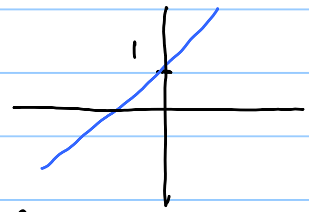
1) Linear Functions:

$\boxed{y = mx + b}$, $m, b \in \mathbb{R}$.



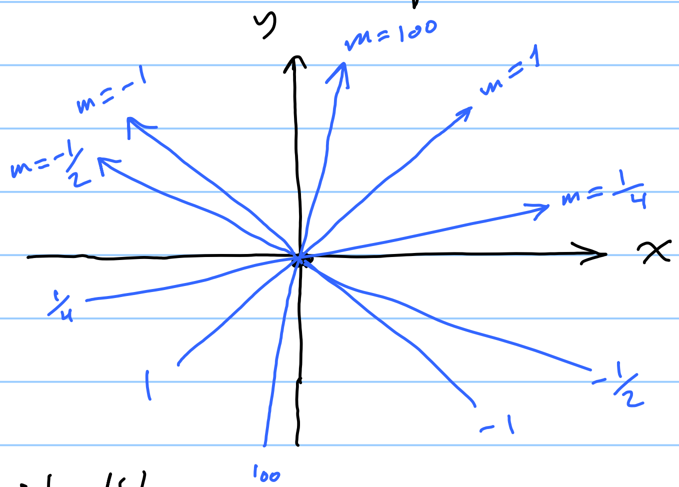
m is the slope of the line and b is the y-intercept.

Examples: 1) $y = 2x + 1$



2) $y = mx$

If $b = 0$, then the line $y = mx$ passes through the origin.



$y = x$ is called the identity fun.

2) Power Functions:

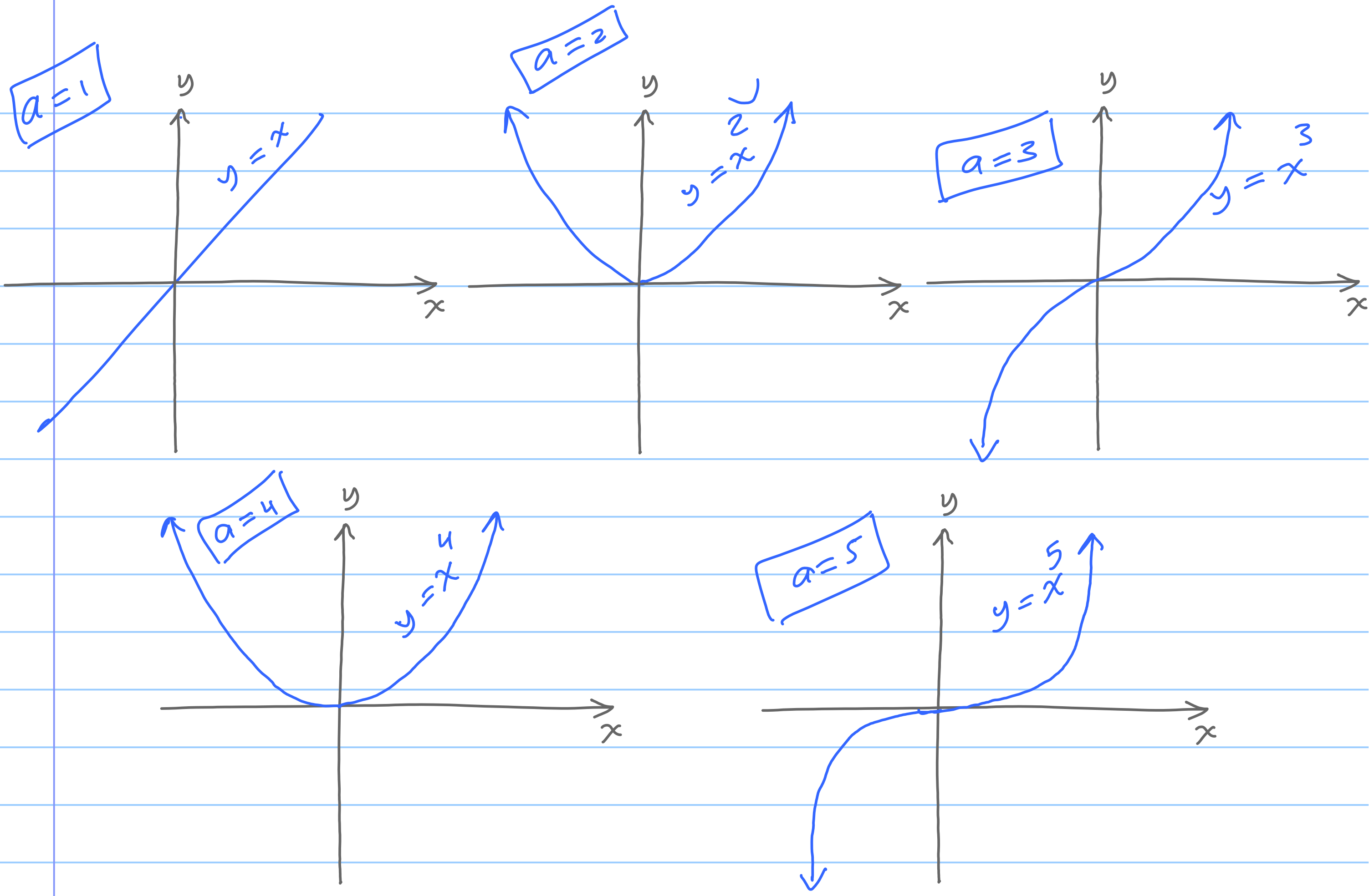
A fun of the form $y = x^a$, where a is constant, is called a power fun.

Remark: 1) If $a \in \mathbb{N}$, as x^2, x^3, x^4, then $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

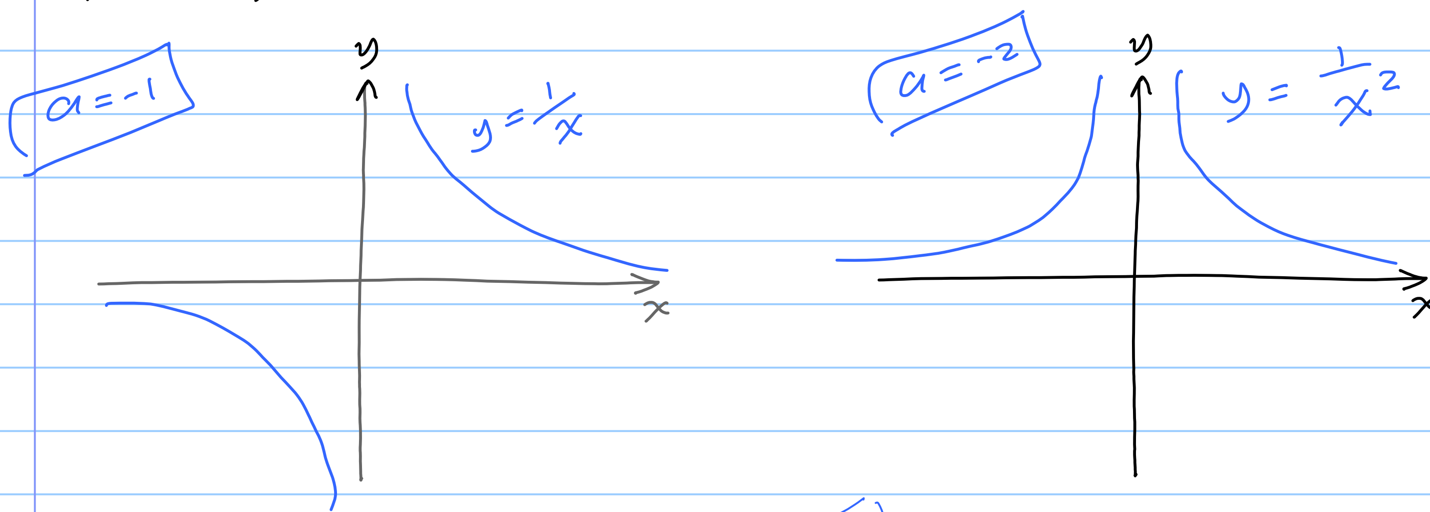
and $\text{Ran}(f) = \begin{cases} [0, \infty), & a \text{ is even}, \\ \mathbb{R}, & a \text{ is odd}. \end{cases}$

2) If $-a \in \mathbb{N}$, as x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, then $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

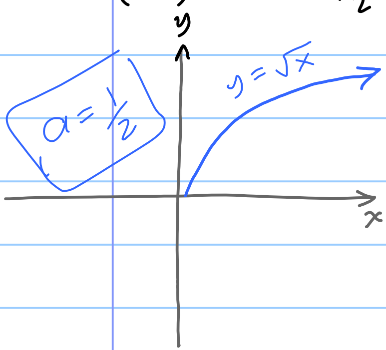
Special Cases: i) $a = 1, 2, 3, 4, 5$.

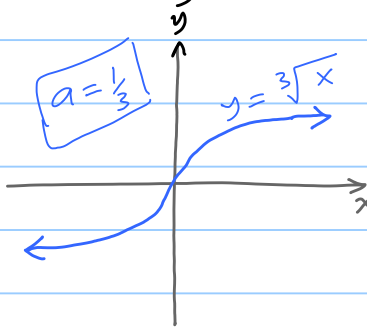


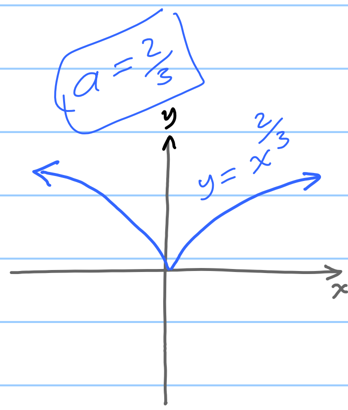
(ii) $a = -1, -2$.

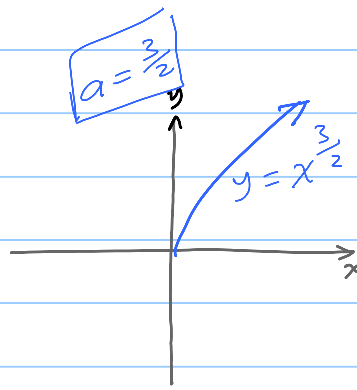


(iii) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.









3) Polynomials: Let n be non-negative integer and let $a_0, a_1, \ldots, a_n$ be constant real numbers. Then a fun of the form:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

is called a polynomial fun and the constants a_is, $i = 0, 1, \ldots, n$ are the coefficients of the polynomial. If $a_n \neq 0$, then the degree of the poly. is equal to n.

Remark: The domain of all polys equals $(-\infty, \infty)$.

Examples: 1) $y = c$ where c is constant is constant poly.

2) $y = mx + b$ is Linear poly.

3) $y = ax^2 + bx + c$ is quadratic poly.

4) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ is cubic poly.

For example: $y = 2x - 1$ is Linear poly, $y = 2x^3 - 1$ is cubic poly, and $y = x^4 - x^3 + x$ is a poly of degree 4.

4) Rational Functions:

A rational fun is a fun of the form $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, where $p(x)$ and $q(x)$ are polys.

Remark: The domain of a rational fun is $\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$.

Examples: 1) $y = \frac{1}{x}$ is a rational fun with $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

2) The funs $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x + 1}$, $g(x) = \dfrac{4x^3 - x + 1}{3x^5 - 2x}$, and

$h(x) = -x^2$ are all rational funs.

5) Algebraic Functions: are funs constructed from polys using algebric operations $(+, -, *, \setminus, \sqrt[n]{\ }, \text{power})$.

Illustration: The following funs are algebric.

1) $y = x^{1/3}(x - 4)$. (2) $y = \frac{3}{4}(x^2 - 5)^{\frac{2}{3}} / (2x + 1)$.

6) Trigonometric Functions:

سوف ندرس بالتفصيل في sec 1.3 .

7) Exponential and Logarithmic Functions:

الدوال الأسية $y = a^x$ واللوغاريتمية $y = \log_a x$ سوف ندرس بالتفصيل في تفاضل B .

8) Transcendental Functions: A fun which is not algebric is called transcendental.

For example: The funs $y = \cos x$, $y = \sin x$, and $y = x^2 + 2x - \sin x$ are all transcendental funs.

Sums, Differences, Products, and Quotients

Defs: If $f(x)$, $g(x)$ are two funs with domains $Dom(f)$, $Dom(g)$ respectively. We define:

1) $(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$, with
$Dom(f \mp g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, and
$Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

3) $(cf)(x) = c \cdot f(x)$, where c is constant
and $Dom(cf) = Dom(f)$

4) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, and
$Dom(f/g) = \left(Dom(f) \cap Dom(g)\right) - \{x : g(x) = 0\}$

Example:

fun	Domain
1) $f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
2) $g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
3) $(f \mp g)(x) = \sqrt{x} \mp \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
4) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$.
5) $(f/g)(x) = \sqrt{x/(1-x)}$	$[0, 1)$
6) $(3g)(x) = 3\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$.

Composite Functions

DEFINITION If f and g are functions, the **composite** function $f \circ g$ ("f composed with g") is defined by

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

The domain of $f \circ g$ consists of the numbers x in the domain of g for which $g(x)$ lies in the domain of f.

That is $\quad \mathrm{Dom}(f\circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

ملاحظة: من الأخطاء الشائعة إيجاد $\mathrm{Dom}(f\circ g)$ باستخدام

قانون $f\circ g(x)$ بعد حسابه وليس استخدام قانون $\mathrm{Dom}(f\circ g)$

Examples: 1) If $f(x) = x^2$ and $g(x) = \sqrt{x}$, then

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \infty)$, $\mathrm{Dom}(g) = [0, \infty) \Rightarrow$

$$\mathrm{Dom}(f\circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

$$= \{x \in [0, \infty) : \sqrt{x} \in (-\infty, \infty)\}$$

$\sqrt{x} \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \sqrt{x} \in [0, \infty) \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} < \infty$

$\Rightarrow \quad 0 \le x < \infty.$

$$D(f\circ g) = [0, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$$

2) If $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = x^2 - 4$

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 4}$$

$\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$, $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, \infty)$, so

$$\mathrm{Dom}(f\circ g) = \{ x \in (-\infty, \infty) : x^2 - 4 \in [0, \infty) \}$$

$$0 \leq x^2 - 4 < \infty$$
$$4 \leq x^2 < \infty$$
$$2 \leq |x| < \infty$$

$2 \leq x < \infty$ or $2 \leq -x < \infty$

$$-2 \geq x > -\infty$$

$$\downarrow$$

$$\cup$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$D(f\circ g) = (-\infty, \infty) \cap \left((-\infty, -2] \cup [2, \infty) \right).$$
$$= (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

3) If $g(x) = 1/1+x$, then

$$g\circ g(x) = g(g(x)) = \frac{1}{1+g(x)} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)}$$
$$= \frac{x+1}{x+2}.$$

4) a) Find $g(x)$ if $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, and $f\circ g(x) = x$

Sol: $f\circ g(x) = f(g(x)) = 1 + \frac{1}{g(x)} = x.$

So,

$$g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

b) Find $g(x)$ if $f(x) = \frac{1}{x}$ and $g \circ f(x) = x$.

sol: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x}) = x$

set $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

$g(t) = g(\frac{1}{x}) = x = \frac{1}{t}$. $\Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$

5) If f is even fun and $g(x)$ is odd fun, what about $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \cdot g$, f/g, ----

sol: $(f \circ g)(-x) = f(\underset{\text{odd}}{g}(-x)) = \underset{\text{even}}{f}(-g(x))$

$= f(g(x)) = (f \circ g)(x) \Rightarrow f \circ g$ is even

$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

is even, and so on, ...

$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$

$= f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x)$

$= -(f \cdot g)(x) \Longrightarrow f \cdot g$ is odd fun

Shifting a Graph of a Function

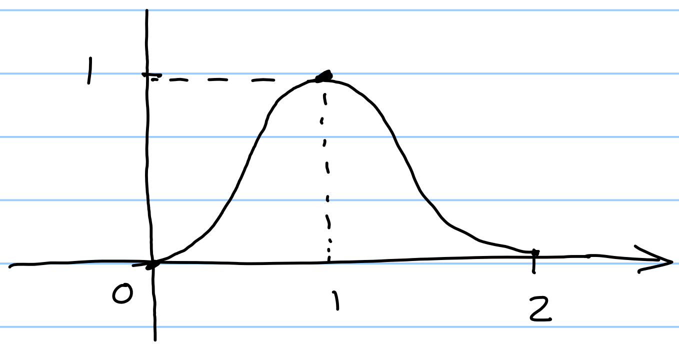
إذا كان لدينا دالة $y=f(x)$ معلومة الرسمة، فإن:

١- الدالة $y=f(x)+k$ [بصورة أخرى $(y-k)=f(x)$] حيث k عدد حقيقي لها نفس رسمة الدالة $y=f(x)$ بعد إزاحتها بمقدار $|k|$ حسب إشارة k، للأعلى إذا كانت k موجبة، وللأسفل إذا كانت k سالبة.

بمعنى آخر أن إستبدال y بـ $y-k$ ينقل رسمة الدالة حسب إشارة k للأعلى أو للأسفل.

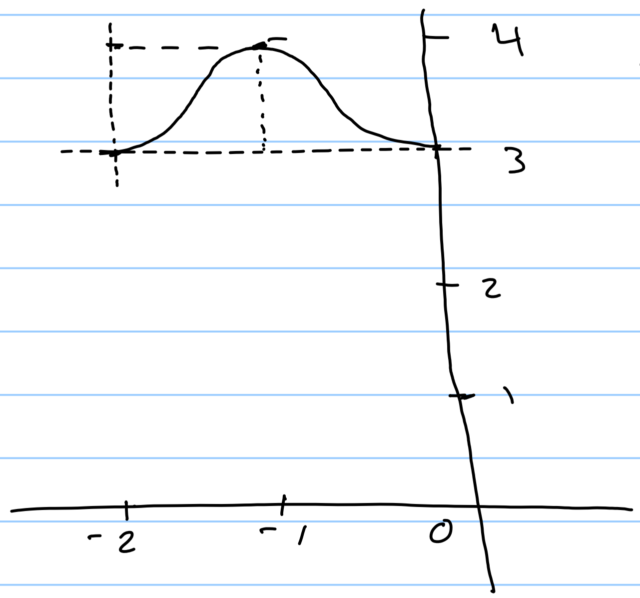
٢- بالمثل، الدالة $y=f(x-h)$ لها نفس رسمة $y=f(x)$ بعد إزاحتها بمقدار $|h|$ حسب إشارة h، لليمين إذا كانت h موجبة ولليسار إذا كانت سالبة.

Examples: 1) If $y=f(x)$ is a fun with the following graph:



Then graph the fun $g(x)=f(x+2)+3$ and find $Dom(g)$, $Ran(g)$.

Sol: الدالة $(y-3)=f(x+2)$ هي دالة لها نفس رسمة الدالة $y=f(x)$ بعد إزاحتها ↑ 3 وحدات و ← وحدتين.

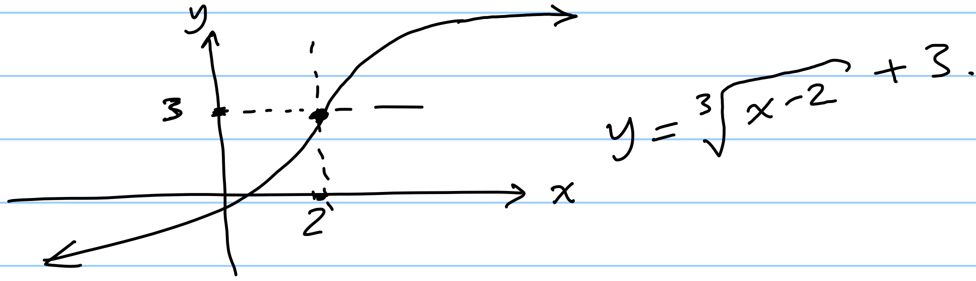


$Dom(g)=[-2,0]$

$Ran(g)=[3,4]$

2) Write the eq of the fun has the same graph of the fun $y = \sqrt[3]{x}$ after shifting 2-units right and 3-up.

Sol: $(y-3) = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} + 3$

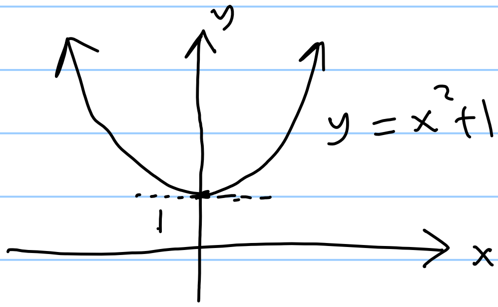


3) Graph the following funs:

a) $y = x^2 + 1$

Sol: $(y-1) = x^2$

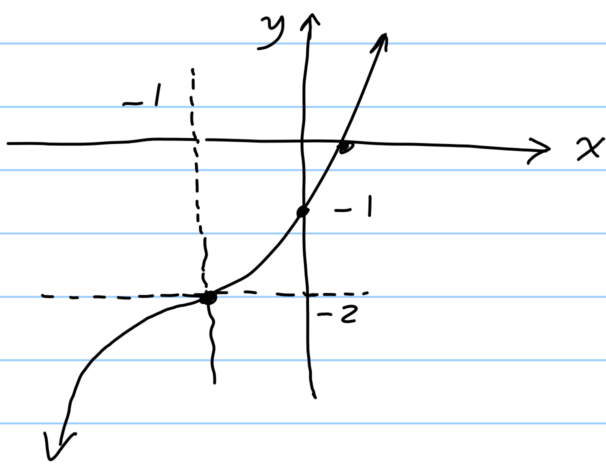
لها نفس رسمة $y = x^2$ مزاحة $1 \uparrow$



b) $y = (x+1)^3 - 2$.

Sol: $(y+2) = (x+1)^3$

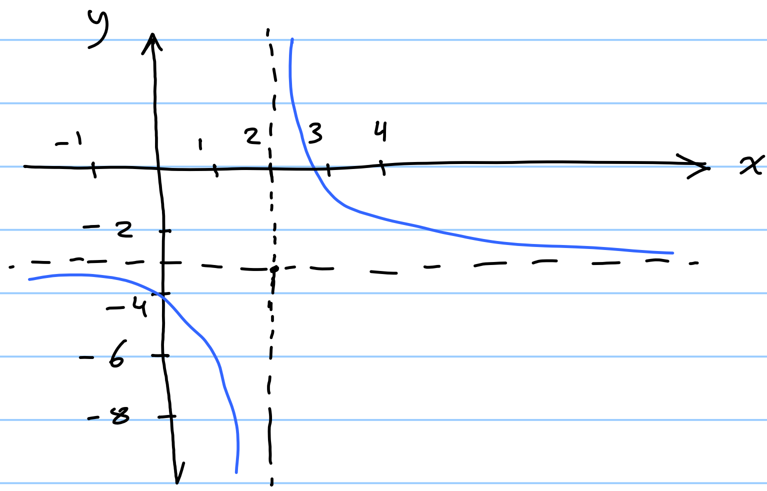
لها نفس رسمة $y = x^3$ بعد إزاحتها $\leftarrow 1$ $2 \downarrow$



c) $y = \dfrac{1}{x-2} - 3$.

sol: $(y+3) = \dfrac{1}{x-2}$

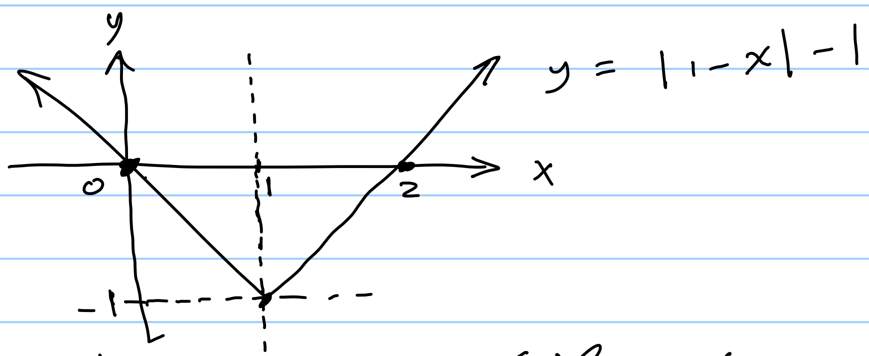
لها نفس رسمة $y = \frac{1}{x}$ بعد إزاحتها $\downarrow 3$, $3 \longrightarrow 2$



d) $y = |1-x| - 1$

sol: $(y+1) = |1-x| = |x-1|$ $\quad (|-x| = |x|)$

لها نفس رسمة $y = |x|$ بعد إزاحتها بمقدار $\downarrow 1$, $\longrightarrow 1$



للتأكد ، نعوض بالقيمة 1 كالتالي : $f(1) = |1-1| - 1 = -1$ نجد أنها صحيحة .

Vertical and Horizontal Reflecting formulas

إفرض أنه لدينا دالة $y=f(x)$ معلومة الرسمة ، فإنه

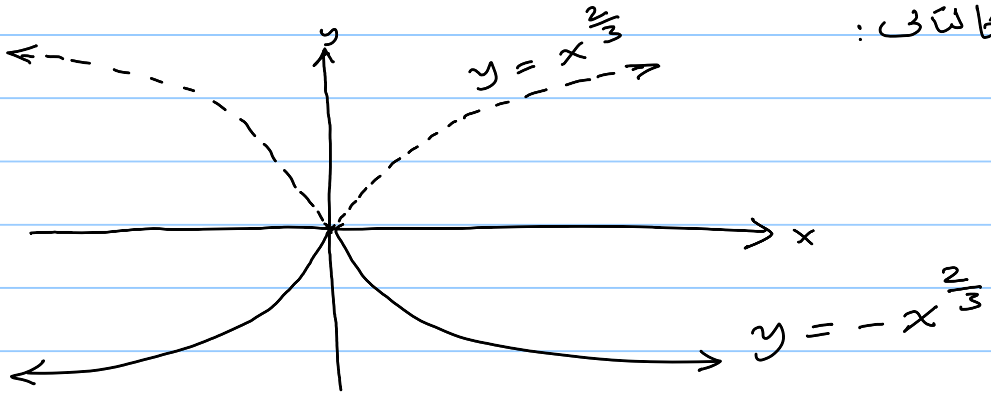
1- رسمة الدالة $y=-f(x)$ هي نفس رسمة الدالة $y=f(x)$ بعد عكسها حول محور x (إبدال محور y الموجب بالسالب) .

2- رسمة الدالة $y=f(-x)$ هي نفس رسمة الدالة $y=f(x)$ بعد عكسها حول محور y (إبدال محور x الموجب بالسالب) .

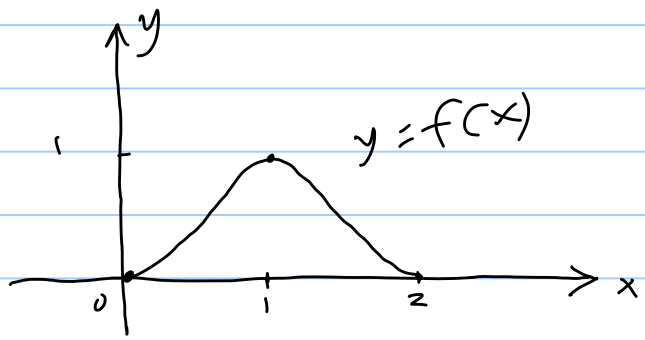
Examples: Graph the following funs:

1) $y = -x^{2/3}$.

sol: رسمة الدالة $y=-x^{2/3}$ هي نفس رسمة الدالة $y=x^{2/3}$ بعد عكسها حول محور x كالتالي:

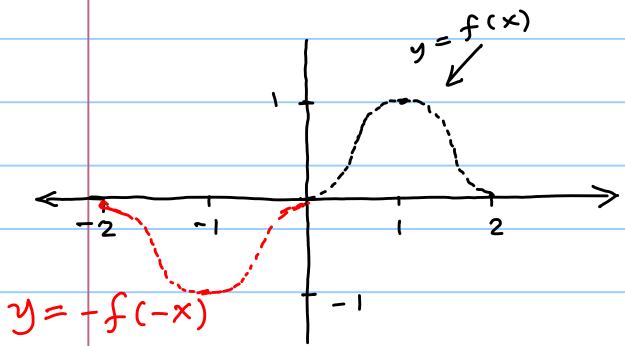


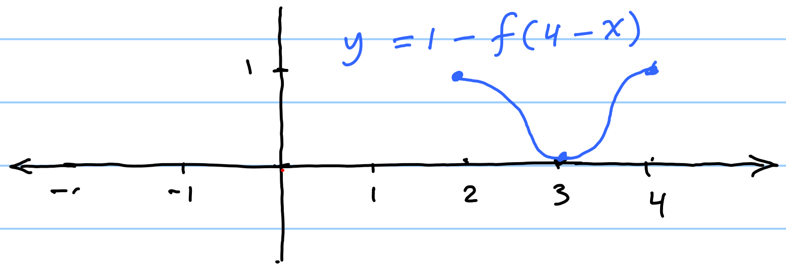
2) If $y=f(x)$ is a fun with graph



Find the graph of the fun $y = 1 - f(4-x)$.

sol: رسمة الدالة $(y-1) = -f(-(x-4))$ هي نفس رسمة $y=-f(-x)$ بعد إزاحتها $\uparrow 1$ ، $\xrightarrow{4}$ ورسمة الدالة $y=-f(-x)$ هي نفس رسمة $y=f(x)$ بعد عكسها حول محوري x و y.



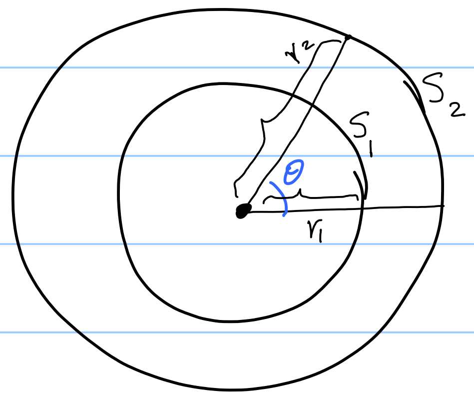


من الجيد فحص الرسمة إذا كانت صحيحة أم لا (كأن نعوض بالقيمة $x=3$ لنحصل على قيمة $y=0$ أو نعوض ب $x=4$ لنحصل على $y=1$ إلخ. مع الأخذ بعين الاعتبار أنه تعويض واحد يكفي

at $x=3$: $y = 1 - f(4-3) = 1 - f(1) = 1 - 1 = 0$ ($f(1)=1$ من الرسمة)

or at $x=4$: $y = 1 - f(4-4) = 1 - f(0) = 1 - 0 = 1$ ($f(0)=0$ من الرسمة).

Angles; Radian Measure



لاحظ في الدائرتين المتحدتين في المركز أنه $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r}$ = ثابت ، والثابت الوحيد من

الرسمة هي الزاوية المركزية θ لكلا الدائرتين / لذا نعرف الثابت على أنه القياس الدائري لـ θ .

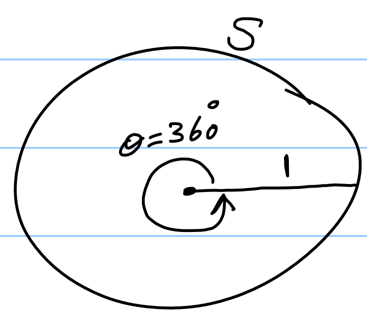
وبالتالي فإن الزوايا تقاس إما بالقياس الدرجي أو بالقياس الدائري .

Def: In a circle of radius r, the angle θ with vertex at origin and initial ray at the positive x-axis has radian measure $\theta = \frac{s}{r}$, where s is the arc of the angle.

So, $s = r\theta$ (θ in radians).

Some Important Special Angles:

In a unit circle, we have that



المحيط

$$360^\circ = \theta = \frac{S}{1} = S = 2\pi * 1 = 2\pi$$

الزاوية 360 بالقياس الدرجي تساوي الزاوية 2π بالقياس الدائري .

So, $\boxed{180^\circ = \pi}$.

الجدول التالي يوضح بعض قيم التكافؤ بين القياس الدائري والقياس الدرجي لبعض الزوايا الخاصة .

TABLE 1.2 Angles measured in degrees and radians

Degrees	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

من الآن فصاعداً ، سوف نستخدم القياس الراديانى لقياس الزوايا .

Angle Converting:

1) $\theta\ (\text{radian}) = \theta\ (\text{degree}) * \frac{\pi}{180}$.

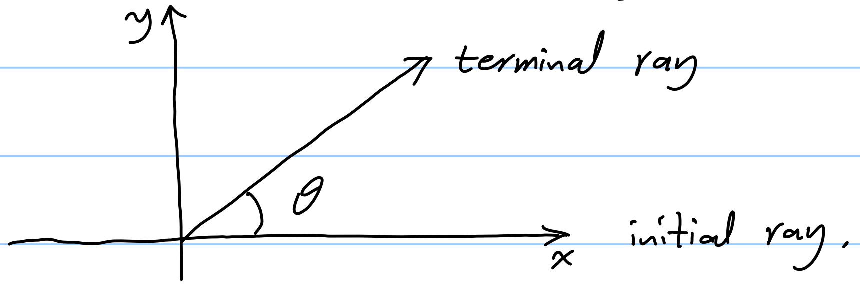
2) $\theta\ (\text{degree}) = \theta\ (\text{radian}) * (180/\pi)$.

For example: For $\theta = 60^\circ$, $\theta\ (\text{radian}) = 60 * \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

For $\theta = \pi/4$, $\theta\ (\text{degree}) = \pi/4 * \frac{180}{\pi} = \boxed{45^\circ}$

طريقة قياس الزوايا

An angle is said to be in standard position if its vertex lies at the origin and its initial ray lies along positive x-axis



θ in standard Position

إذا كانت الزاوية في الوضع القياسي تحسب من الشق الموجب لمحور x (initial ray) نحو إتجاه عكس عقارب الساعة ، فإن الزاوية تكون ذات قياس موجب ، وإذا كان القياس في إتجاه عقارب الساعة ، فإن الزاوية تكون ذات قياس سالب .

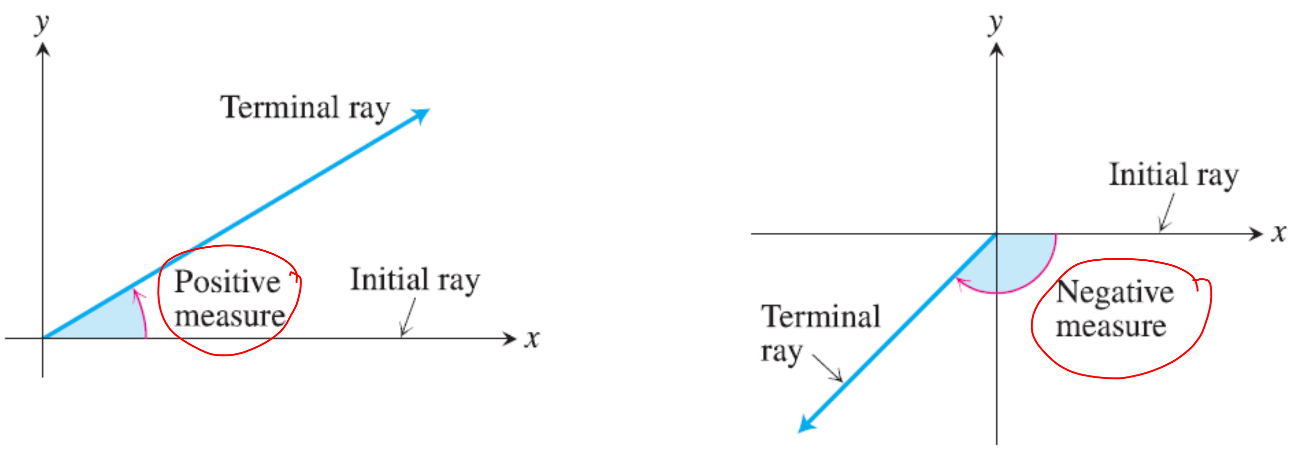
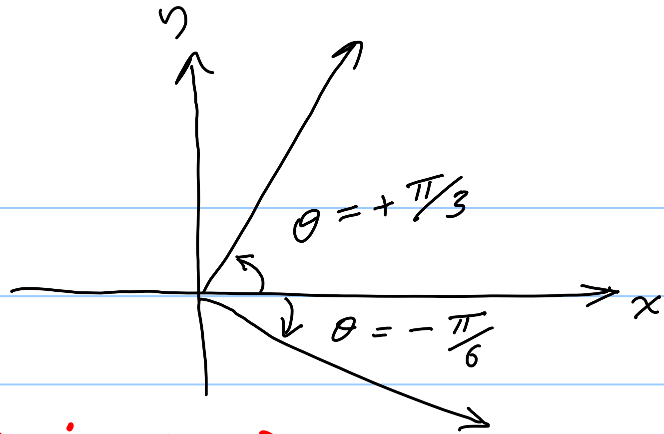


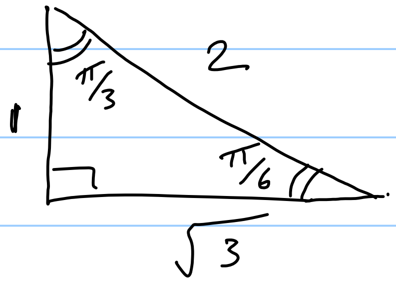
FIGURE 1.39 Angles in standard position in the xy-plane.

Illustration:

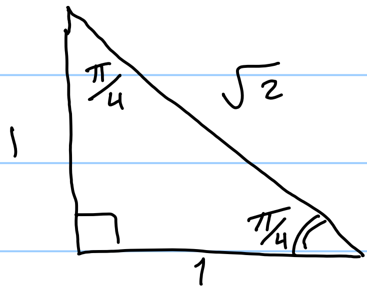


مثلثات خاصة

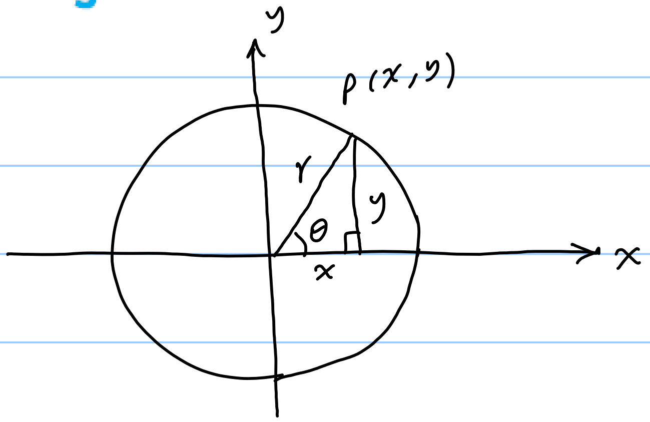
① المثلث الثلاثيني الستيني :



② متساوي الساقين :



The Six Basic Trigonometric Functions



باستخدام دائرة نصف قطرها r ومركزها نقطة الأصل ، إذا كانت θ بالوضع القياسي كما هو موضح في الرسم ، فإننا نعرف الدوال المثلثية الأساسية الستة كالتالي :

sine: $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ **cosecant:** $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$

cosine: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ **secant:** $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

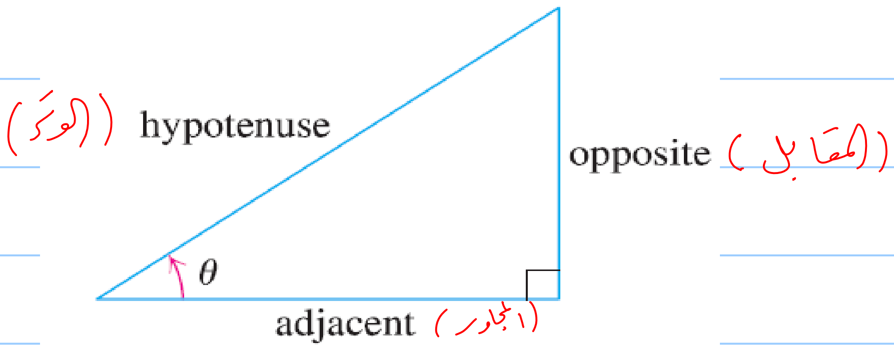
tangent: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **cotangent:** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

From the def, we have the following:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

باستخدام المثلث القائم يمكنه تعريف الدوال المثلثية كالتالي :



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = 1/\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = 1/\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = 1/\tan\theta.$$

Remarks: 1) Directly from the def above, and using the fact that $0 \le |x| \le r$, $0 \le |y| \le r$, we get that

$$-1 \le \sin\theta \le 1 \quad \text{and} \quad -1 \le \cos\theta \le 1.$$

(بشكل مكافئ) $$0 \le |\sin\theta| \le 1 \quad \text{and} \quad 0 \le |\cos\theta| \le 1.$$

2) While $\theta \neq \theta + 2n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$, the two angles have the same initial and terminal rays. This implies that they have the same values of trigonometric funs.

So, $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2n\pi)$, $\cos\theta = \cos(\theta + 2n\pi)$, ---

For example: $\sin(7\pi/3) = \sin(2\pi + \pi/3) = \sin\pi/3$.

$\cos(33\pi/6) = \cos(24\pi/6 + 9\pi/6) = \cos(4\pi + \frac{3}{2}\pi) = \cos(\frac{3}{2}\pi)$.

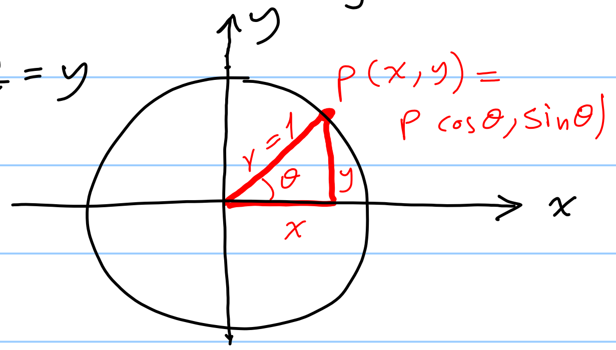
3) Since $x^2+y^2=r^2$, we get that

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1.$$

4) Using the unit circle, we have the following:

(a) $\cos\theta = \frac{x}{r} = x$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = y$

So $p(x,y) = p(\cos\theta, \sin\theta)$



(b) يستفاد من النقطة (a) بإيجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا خاصة ليس لها مثلث خاص

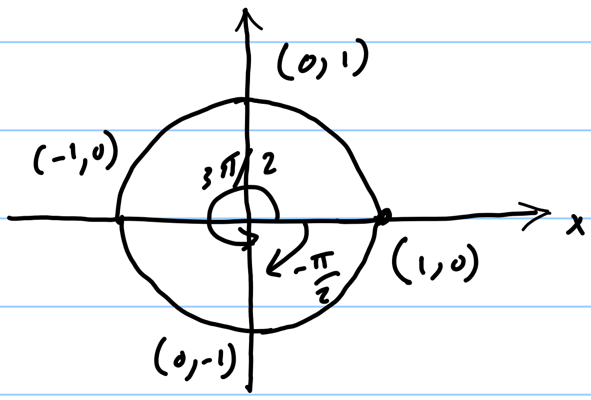
وهي الزوايا التي يقع terminal ray على أحد المحاور x أو y مثل الزوايا

$\theta = 0, \mp\pi/2, \mp\pi, \mp 3\pi/2, \dots$. (انظر الرسمة)

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

$\sec 0 = 1$, $\tan 0 = 0$

$\cot 0$ and $\csc 0$ are undefined.



$\sin\frac{3\pi}{2} = -1 = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$.

$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\tan\frac{3\pi}{2}$ and $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ are undefined.

$\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$, $\tan(-\pi) = 0$. And so on.

(c) بالإعتماد على الملاحظة 4(a)، يمكن ملاحظة إشارات الدوال المثلثية

في الأرباع بملاحظة إشارة x، y كالتالي:

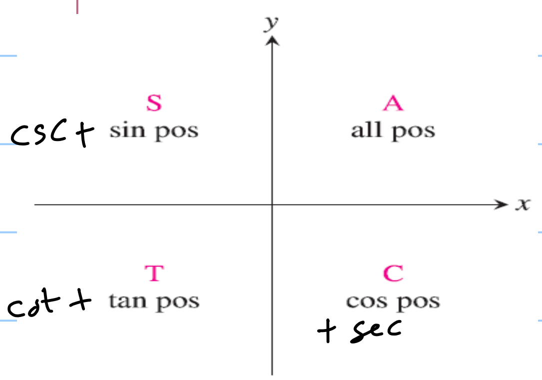


FIGURE 1.44 The CAST rule,

[في الربع الثاني تكون $p(\cos\theta, \sin\theta) = p(x,y)$

وتكون x سالبة و y موجبة، وعليه فإن

قيمة $\sin\theta$ ومقلوبها تكون موجبة وبقية القيم الأربعة

الأخرى تكون سالبة، وهكذا في بقية الأرباع.]

Periodicity and Graphs of the Trigonometric Functions

DEFINITION A function $f(x)$ is **periodic** if there is a positive number p such that $f(x + p) = f(x)$ for every value of x. The smallest such value of p is the **period** of f.

Example: Using Remark (2) above, all trigonometric funs are periodic funs. Later – from the graph – we find that the funs $\tan\theta$ and $\cot\theta$ have period $p = \pi$ and the other four funs have period $p = 2\pi$. That is,

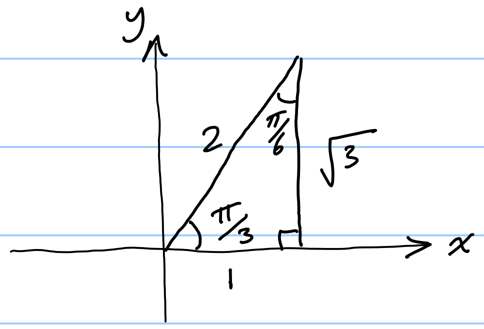
$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$, $\cot(\theta+\pi) = \cot\theta$, $\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$,

$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$, $\sec(\theta+2\pi) = \sec\theta$ and $\csc(\theta+2\pi) = \csc\theta$.

Examples: Find $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, ... if

(1) $\theta = \pi/3$

Sol: لحل مثل هذا المثال / نقوم برسم الزاوية في الوضع القياسي / وملاحظة ما إذا كانت من الزوايا الخاصة نستخدم معها المثلث القائم الثلاثيني - ستيني أو متساوي الساقين / ومن بعض الزوايا التي ليس لها مثلث خاص نستخدم دائرة الوحدة / كما يلي :



يجب ملاحظة إشارات x / y حسب الأرباعي.

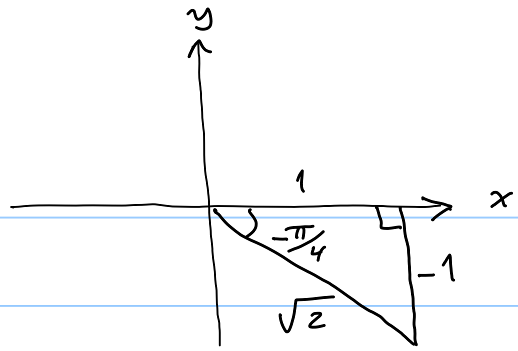
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2},$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

بقية الدوال المثلثية تحسب كمعكوس الدوال المحسوبة مثال ذلك

$$\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\pi/3} = \frac{2}{1} = 2, \quad \text{and so on.}$$

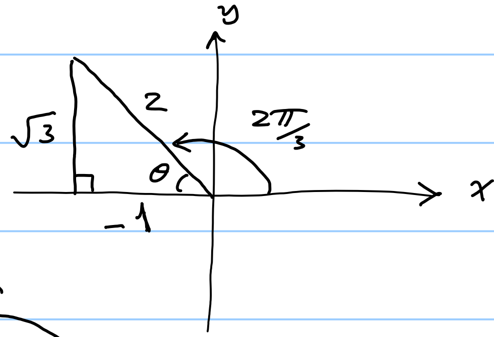
2) $\theta = -\pi/4$.



لاحظ هنا انه زاوية $\theta = -\pi/4$ لا تشكل خاص ولكن لا هنا سالبة.

$\sin \frac{-\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\cos \frac{-\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan \frac{-\pi}{4} = -1$, ...

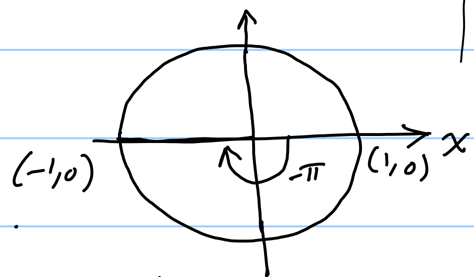
3) $\theta = 2\pi/3$.



$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

$\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, ...

4) $\theta = -\pi$



$\cos(-\pi) = -1$

$\sin(-\pi) = 0 = \tan(-\pi)$.

$\sec(-\pi) = -1$, $\cot(-\pi)$ and $\csc(-\pi)$ are undefined.

5) $\theta = -11\pi/3$.

<u>sol</u>: Note that $\frac{-11}{3}\pi = (1-12)\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 4\pi$. So,

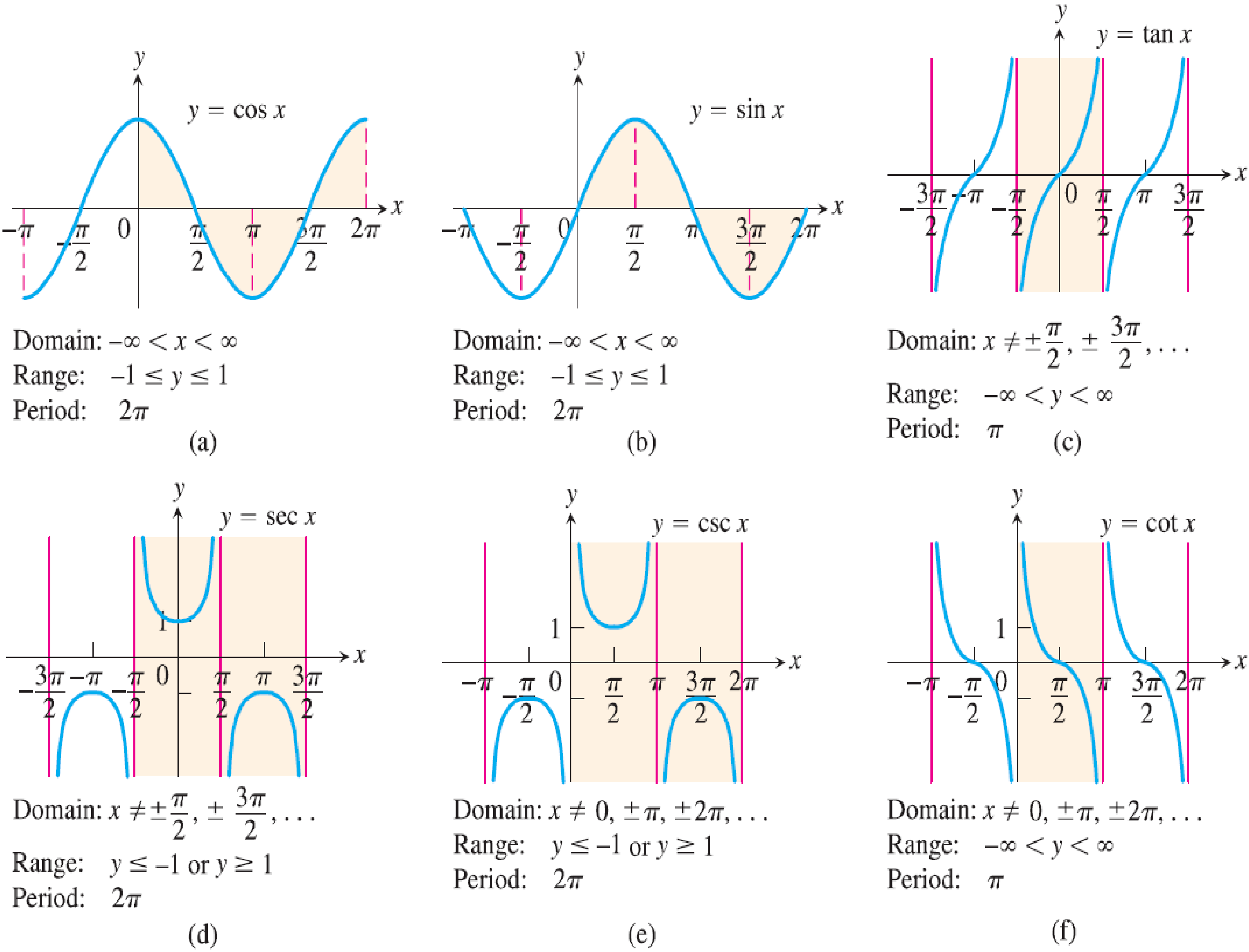
$\sin\left(\frac{-11}{3}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{-11}{3}\pi = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, ...

بهذه الطريقة يمكن حساب الدوال المثلثية لعدد من الزوايا الخاصة كما في الجدول:

Degrees	**−180**	**−135**	**−90**	**−45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**	**360**
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Graph of Trigonometric Funs

بداية يجب ملاحظة أنه θ كزاوية في المثلث القائم تستخدم لحساب قيم الدوال المثلثية ما نكتبها بالقياس الدائري هي رقم على محور x ، مثال ذلك $\theta = \frac{\pi}{2}$ كزاوية هي الزاوية القائمة التي تعادل الزاوية 90° بالقياس الدرجي، ولكنه على محور x هي العدد $\frac{\pi}{2}$ والذي يساوي بالتقريب $1.57079...$. باستخدام هذه الحقيقة مع الجدول السابقة، نرسم الدوال المثلثية عند نقاط الجدول ثم نوصل هذه النقاط بمنحنى أملس على فترة $[0, 2\pi]$ ، رسمه ثم نستخدم حقيقة أن الدوال المثلثية هي دوال دورية لرسم بقية الرسمة ونحصل على :



Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(a)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(b)

Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(c)

Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ or $y \ge 1$
Period: 2π
(d)

Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ or $y \ge 1$
Period: 2π
(e)

Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(f)

من خلال الرسم يتضح أنه $\cos x$ ، $\sec x$ هي دوال زوجية، رسمها متماثلة حول y وبقية الدوال هي فردية ورسمها متماثلة حول نقطة الأصل . نلاحظ أيضاً باستخدام

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ مفهوم الإزاحة ان

$\sin x = \cos\left(x - \pi/2\right)$ وكذلك

Trigonometric Identities

1) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ من ملاحظة سابقة وجدنا ان العلاقة محققة لجميع قيم θ في $\mathbb{R}$.

2) بقسمة المعادلة في (1) على $\cos^2\theta$ نحصل على المعادلة المكافئة

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \left(\text{or} \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1\right).$$

3) بقسمة المعادلة في (1) على $\sin^2\theta$ نحصل على المعادلة

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \quad \left(\text{or} \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1\right).$$

4) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$

ومنه $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$, and

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

5) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$

ومنها $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$, and

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

6) من القانون (1) والفرعية الثالثة من القانون (4) يمكن الحصول على القانونين التاليين:

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \text{and}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Examples: 1) Evaluate the following:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

حل 1 $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}.$$

2ح

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \left|\cos\frac{\pi}{12}\right| = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)/2 \quad \left[\text{لاحظ أن } \tfrac{\pi}{12} \text{ في الربع الأول}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \cos\pi/12 = \boxed{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)/2}.$$

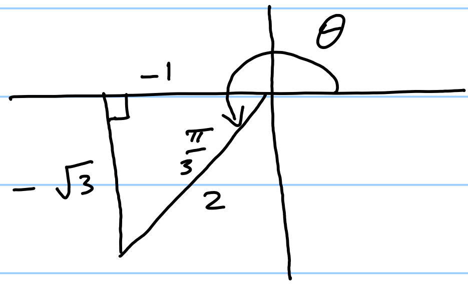
b) $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\pi/6\,\cos\pi/4 + \cos\frac{\pi}{6}\,\sin\pi/4$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

2) If $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ and $\cos\theta = \frac{-1}{2}$, find θ.

Sol:

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$



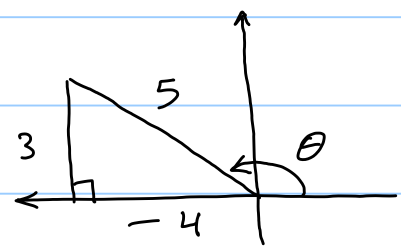
3) If $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ and $\sin\theta = \frac{3}{5}$, find

$\cos\theta$, $\tan\theta$, ...

Sol: $\cos\theta = \frac{-4}{5}$, $\sec\theta = \frac{-5}{4}$,

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\cot\theta = \frac{-4}{3}$

and $\csc\theta = \frac{5}{3}$.



4) Prove that $\cos x = \sin(x+\pi/2)$

PF: $\sin(x+\pi/2) = \sin x\cos\pi/2 + \cos x\sin\pi/2$

$$= (\sin x)*0 + (\cos x)*1 = \cos x.$$

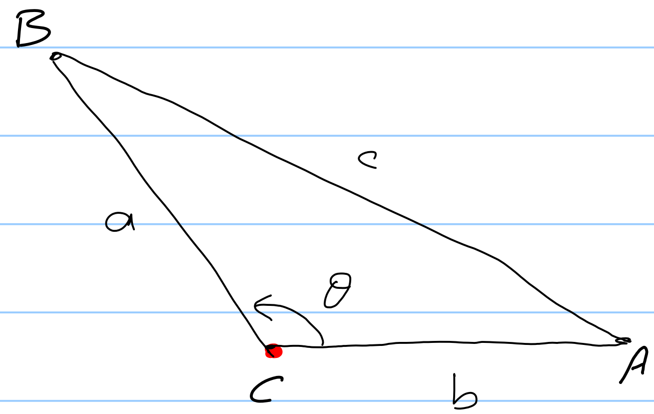
Two Special Inequalities:

For any θ measured in radian,

1) $-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta|$ [Equivalently, $|\sin\theta| \le |\theta|$]

2) $-|\theta| \le 1-\cos\theta \le |\theta|$ [Equivalently, $|1-\cos\theta| \le |\theta|$].

The Law of Cosine:



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

End of Chapter one

Chapter 2: LIMITS AND CONTINUITY

2.2: Limit of a Fun and Limit Laws:

Limits of Fun Values:

Firstly, Look at the following example:

Example: For $x \neq 1$, how does the fun

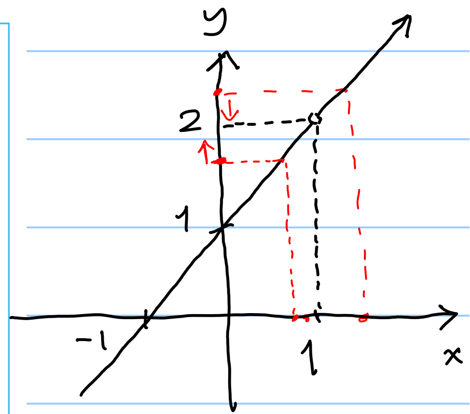
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$$

behave near $x = 1$?

Sol: For $x \neq 1$, $f(x) = x+1$. So

TABLE 2.2 The closer x gets to 1, the closer $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ seems to get to 2

Values of x below and above 1	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001



Clearly, $f(x)$ is very closed to 2 (and we say that $f(x)$ goes to 2) when x approaches 1, and we write

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Note that $f(x)$ is not defined when $x = 1$.

Def: (Informal Def)

Suppose $f(x)$ is defined on an open interval about x_0, *except possibly at x_0 itself*. If $f(x)$ is arbitrarily close to L (as close to L as we like) for all x sufficiently close to x_0, we say

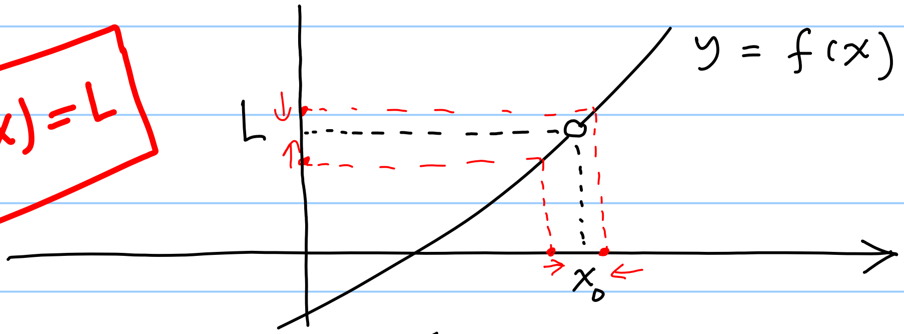
that f approaches the **limit** L as x approaches x_0, and write

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

which is read "the limit of $f(x)$ as x approaches x_0 is L." For instance, in Example 1 we would say that $f(x)$ approaches the *limit* 2 as x approaches 1, and write

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

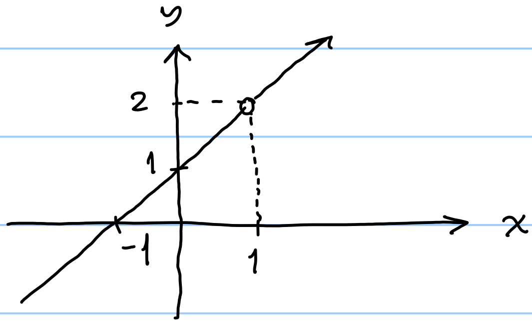
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$



لاحظ أن النهاية هي سلوك للدالة ، حيث يمكن الإقتراب من L بمسافة غير محددة وذلك عن طريق الإقتراب من x_0 بشكل كافٍ.

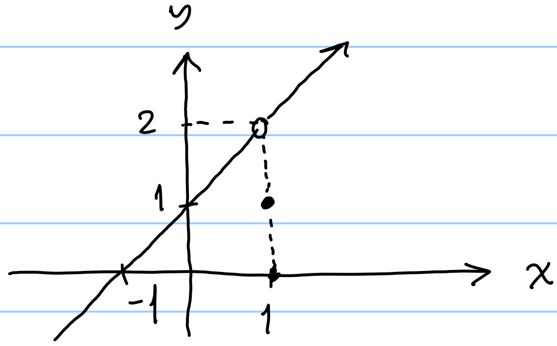
Remark: The limit does not depends on the value of f at x_0. Look at the following illustrations:

1) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.



While $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, $f(1)$ is undefined

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)}{(x-1)}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

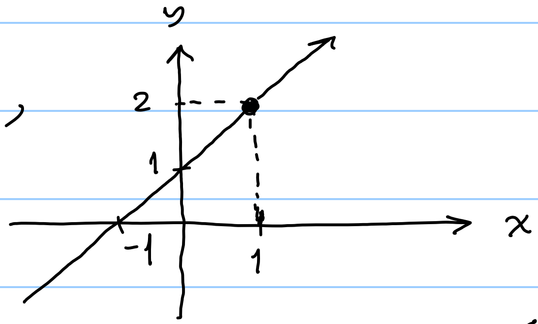


$f(1) = 1$, while $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. So, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1; \\ 2, & x = 1. \end{cases} \Rightarrow f(x) = x+1 \quad \forall x.$

$f(1) = 2$ and $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$,

so $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.



عندما تكون النهاية موجودة عند نقطة x_0 ، فإن هذه الدالة عند x_0 قد تكون معرفة وقد لا تكون ، وإذا كانت معرفة ، فإن $f(x_0)$ قد تساوي النهاية وقد لا تساويها ، وعليه فإنه لا وجود لأي تأثير لقيمة الدالة $f(x_0)$ على نهايتها أو العكس .

Examples: 1) If $f(x)$ is the identity fun $y = x$, then for any point $c \in \mathbb{R}$, we have

$$\lim_{x\to c} f(x) = c \qquad (= f(c))$$

لاحظ أن النهاية تساوي قيمة الدالة ، وهذا جائز ، ولكن قيمة النهاية لم يتم حسابها من قيمة الدالة .

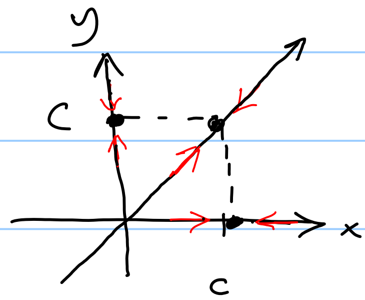


Illustration: $\lim\limits_{x\to 5} x = 5$, $\lim\limits_{x\to -3} x = -3$.

2) If $f(x)$ is a constant fun $f(x) = K$ (horizontal line).

Then for any $c \in \mathbb{R}$, we have

$$\lim_{x\to c} K = K. \quad (= f(c)).$$

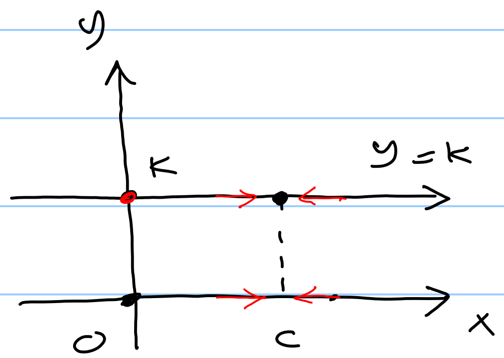


Illustration:

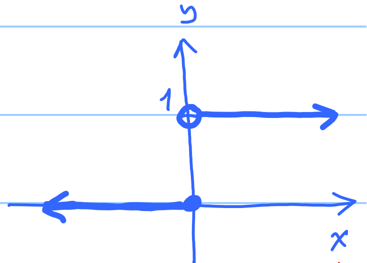
$\lim\limits_{x\to 10} -5 = -5$, $\lim\limits_{x\to -3} 4 = 4$

3) $\lim\limits_{x\to 2} (5x - 3) = 7$

(بعد دراسة السلوك للدالة ، بطريقة مشابهة لأول مثال من هذا الفصل)

4) Let $y = u(x)$ be the unit step fun defined by:

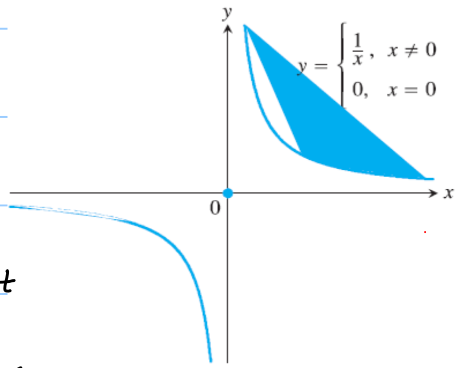
$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$



(Jumps at zero)

Since $u(x)$ jumbs at $x=0$, so for negative values of x, $u(x)$ is arbitrary closed to zero, while for positive values of x, $u(x)$ is arbitrary closed to 1. Hence there is no single value L such that $u(x) \longrightarrow L$ as $x \to 0$. Thus, $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$ does not exist. (d.n.e.)

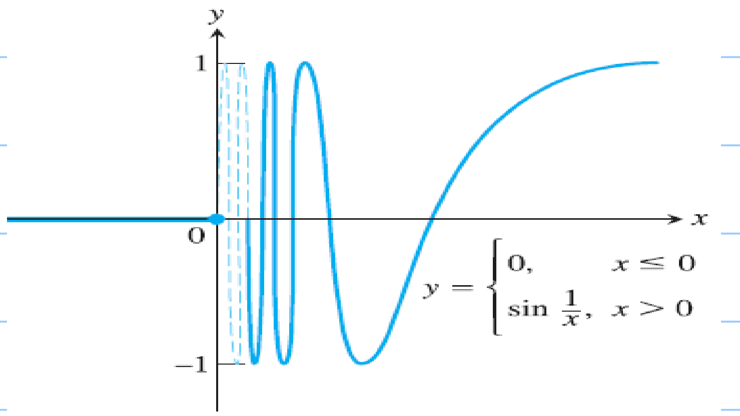
5) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



(grows two Large)

For x near zero, $f(x)$ grow arbitrarily large in abs value and don't stay closed to any fixed real number. So, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d.n.e.

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$



It *oscillates too much to have a limit*: $f(x)$ has no limit as $x \to 0$ because the function's values oscillate between $+1$ and -1 in every open interval containing 0. The values do not stay close to any one number as $x \to 0$ (Figure 2.10c). ■

7) Given that $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$,

(a) must f be defined at $x = 1$?

Ans: No, f may be defined or undefined at $x = 1$.

(b) If so, must $f(1) = 5$?

Ans: No, $f(1)$ may equal to 5 or any other value.

(c) Can we conclude any thing about the value of $f(x)$ at $x = 1$?

Ans: No.

The Limit Laws

THEOREM 1—Limit Laws If L, M, c, and k are real numbers and

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad \text{then}$$

1. *Sum Rule:* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Difference Rule:* $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Product Rule:* $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Quotient Rule:* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Power Rule:* $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, n a positive integer
7. *Root Rule:* $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n a positive integer

(If n is even, we assume that $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$.)

in book:

EXAMPLE 5 Use the observations $\lim_{x\to c} k = k$ and $\lim_{x\to c} x = c$ (Example 3) and the properties of limits to find the following limits.

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$ **(b)** $\lim_{x\to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ **(c)** $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Solution

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3$ Sum and Difference Rules

$= c^3 + 4c^2 - 3$ Power and Multiple Rules

(b) $\lim_{x\to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{\lim_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x\to c}(x^2 + 5)}$ Quotient Rule

$= \dfrac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5}$ Sum and Difference Rules

$= \dfrac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ Power or Product Rule

(c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)}$ Root Rule with $n = 2$

$= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3}$ Difference Rule

$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ Product and Multiple Rules

$= \sqrt{16 - 3}$

$= \sqrt{13}$ ■

THEOREM 2—Limits of Polynomials

a) If $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, then

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

b) If $P(x)$ and $Q(x)$ are polynomials and $Q(c) \neq 0$, then

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Examples:

1) $\lim_{x\to -2}(3x^4 + 2x - 1) = 3(-2)^4 + 2*(-2) - 1 = \boxed{43}$

2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \dfrac{3^3 + 4 * 3^2 - 3}{3^2 + 5} = \boxed{\dfrac{60}{14}}$

Canceling a Common Factor:

إذا كان لدينا دالة كسرية، وكانت النهاية عند التعويض المباشر من البسط والمقام تعطي الصيغة $\left(\frac{0}{0}\right)$، فإننا لا نستطيع هنا إستخدام النظرية السابقة من التوزيع على البسط والمقام لأن المقام يساوي صفراً. ولكن الصيغة $\left(\frac{0}{0}\right)$ هي صيغة غير محددة، وهي تحتاج للتحديد وعلاج حسب طبيعة النهاية، ويعتمد العلاج في أغلب الأحيان على حذف عامل مشترك بين البسط والمقام كما توضح الأمثلة التالية:

Examples: Find the following Limits:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = \boxed{2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{3}{1} = \boxed{3}$

3) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \left(\frac{0}{0}\right) * \dfrac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$. (ضرب في المرافق)

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h-2)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

4) $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{y - 1}{\sqrt{y+3} - 2} \left(\frac{0}{0}\right) * \dfrac{\sqrt{y+3} + 2}{\sqrt{y+3} + 2} = \lim\limits_{y \to 1} \dfrac{\cancel{(y-1)}(\sqrt{y+3} + 2)}{\cancel{(y+3-4)}}$

$= \lim\limits_{y \to 1} \sqrt{y+3} + 2 = \boxed{4}$

5) Given that $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$, find $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

sol: $\left[\lim\limits_{x\to 3}(f(x)-5)\right] / \left[\lim\limits_{x\to 3}(x-2)\right]$ (توزيع النهاية على البسط والمقام)

$= \left(\lim\limits_{x\to 3} f(x) - 5\right)/1 = \lim\limits_{x\to 3} f(x) - 5 = 4$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \boxed{9}$

6) Given that $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$, find $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

sol: لاحظ هنا أننا لا نستطيع توزيع النهاية على البسط, المقام كما تم في مثال (5)

بسبب أن المقام يكون صفر. لذا سنقوم بحل المثال بطريقة أخرى.

For $x \neq 2$, not that

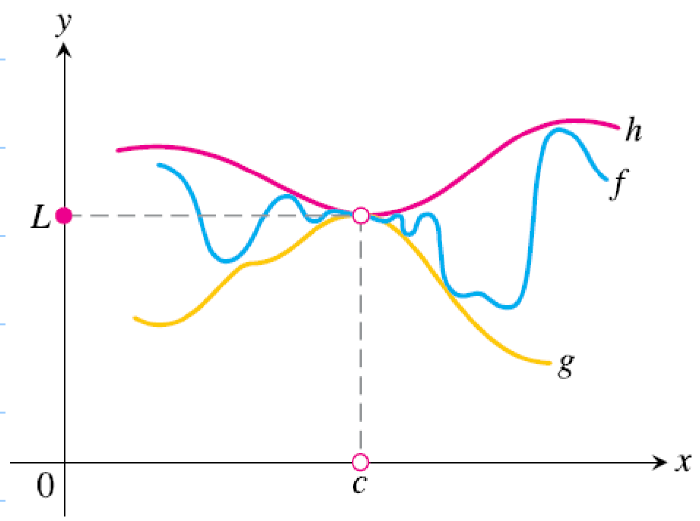
$f(x) = (x-2)\left(\dfrac{f(x)-5}{x-2}\right) + 5$. Using theorems above,

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x-2) * \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)-5}{x-2}\right) + 5 = 0 * 4 + 5 = \boxed{5}$

7) Find $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ if $\lim\limits_{x\to -4}\left(x \lim\limits_{x\to 0} g(x)\right) = 2$.

sol: Set $k = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ which is constant real, so we have $\lim\limits_{x\to -4}(kx) = 2$. Hence $-4k = 2$ and so $k = -1/2$ or $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \boxed{\dfrac{-1}{2}}$

The Sandwich Thrm:



THEOREM 4—The Sandwich Theorem Suppose that $g(x) \le f(x) \le h(x)$ for all x in some open interval containing c, except possibly at $x = c$ itself. Suppose

also that

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Then $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Examples: 1) Given that $1 - \frac{x^2}{4} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \neq 0$,

Find $\lim_{x \to 0} f(x)$.

sol: Set $g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ and $h(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

So, $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \neq 0$. Moreover,

$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 = \lim_{x \to 0} h(x)$. By Sandwich thrm,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{1}$$

2) Find $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

sol: $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ and $x^2 \geq 0 \quad \forall x \neq 0$. So

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2 \quad \forall x \neq 0.$$

as $x \to 0$: $-x^2 \to 0$, $x^2 \sin\frac{1}{x} \to 0$, $x^2 \to 0$

By Sandwich thrm, $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

3) For any fun f, if $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$, then $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

PF: Using the fact that $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, and

as $x \to 0$, $|f(x)| \longrightarrow 0$ and $-|f(x)| \longrightarrow 0$. Thus, by

sandwich theorem, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

THEOREM 5 If $f(x) \leq g(x)$ for all x in some open interval containing c, except possibly at $x = c$ itself, and the limits of f and g both exist as x approaches c, then

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

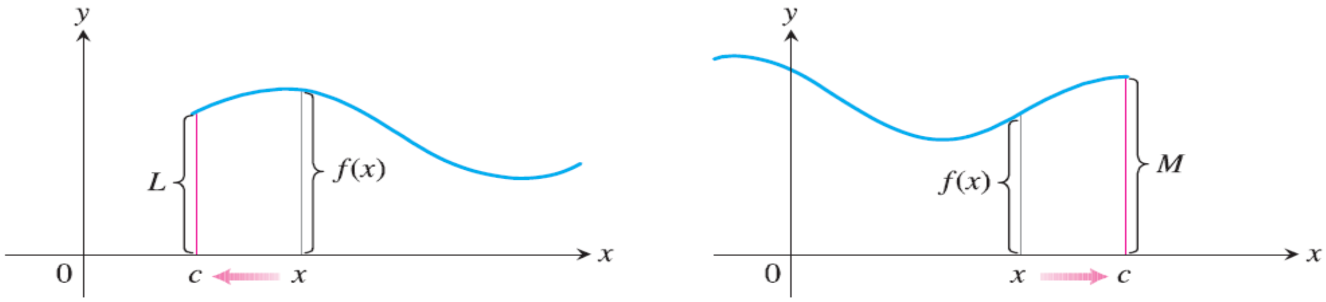
Exercise: Given that $|f(x) - 3| < 4(x-2)^2$, find $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Note Title ٢٢/١١/١٧

2.4 One-Sided Limits

مقدمة: لكي يكون للدالة $y=f(x)$ النهاية L عندما $x \to x_0$ ، فإنه يجب أن تكون الدالة معرفة في فترة على جانبي النقطة x_0 ، وعندما نقترب من x_0 فإننا نقترب من كلا الإتجاهين ، لذلك فإن النهاية العادية تسمى أيضاً نهاية من جهتين two-sided limit.

ولكن إذا تعذر وجود النهاية من جهتين ، فإنه قد يكون هناك نهاية من جهة واحدة ، وبالتالي نحصل على مفهوم النهاية من جهة اليمين والنهاية من جهة اليسار.



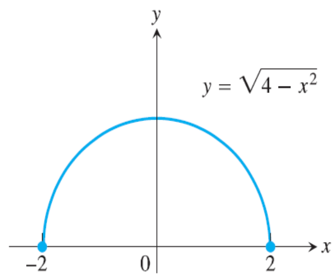
(a) $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ (b) $\lim_{x\to c^-} f(x) = M$

إذا كان التقارب لـ c من جهة اليمين موجوداً ويساوي L ، تسمى النهاية نهاية يمنى للدالة ، (right-hand limit) ونكتب $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ ،

وإذا كان التقارب لـ c من جهة اليسار موجوداً ويساوي M ، تسمى النهاية نهاية يسرى للدالة ، (left-hand limit) ونكتب $\lim_{x\to c^-} f(x) = M$.

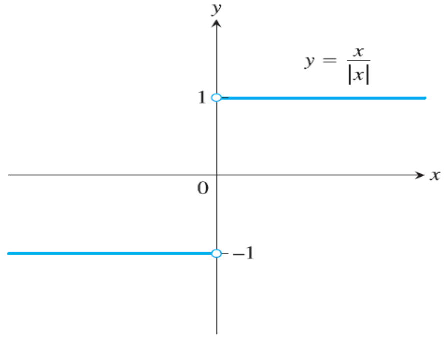
Illustration: 1) Consider the fun $y=\sqrt{4-x^2}$ with domain $[-2, 2]$.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0 , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$$



لاحظ هنا أن الدالة ليس لها نهاية يسرى عند $x=-2$ ، أو نهاية يمنى عند $x=2$. أيضاً النهاية العادية غير موجودة عند النقطتين الحدوديتين 2 و -2 .

2) For $x \neq 0$, $y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ d.n.e., while

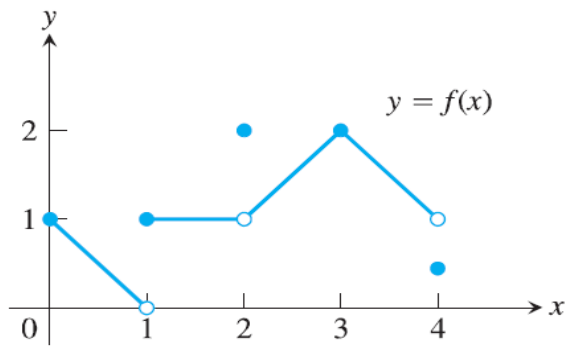
$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ and $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$.

THEOREM 6 A function $f(x)$ has a limit as x approaches c if and only if it has left-hand and right-hand limits there and these one-sided limits are equal:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

Examples:

1) Let $y = f(x)$ be a fun with graph, then



(a) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, and

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$, so

$\lim_{x \to 1} f(x)$ d.n.e.

(b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, while $f(2) = 2$.

(c) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, and $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1 \neq f(4)$.

(d) $\lim_{x \to 3} f(x) = 2 = f(3)$.

(e) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$, and $\lim_{x \to 4} f(x)$

do not exist.

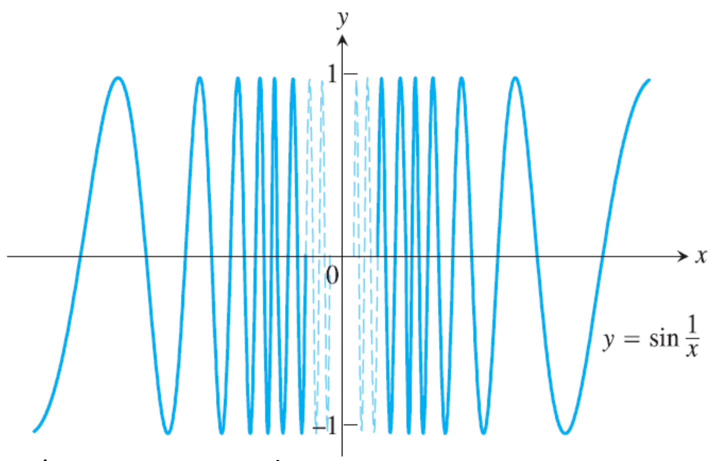
2) Let $y = \sin \frac{1}{x}$

as $x \to 0^+$ and as $x \to 0^-$,

y takes all values between

−1 and 1. So $f(x)$ oscillates

two much to has a limit.

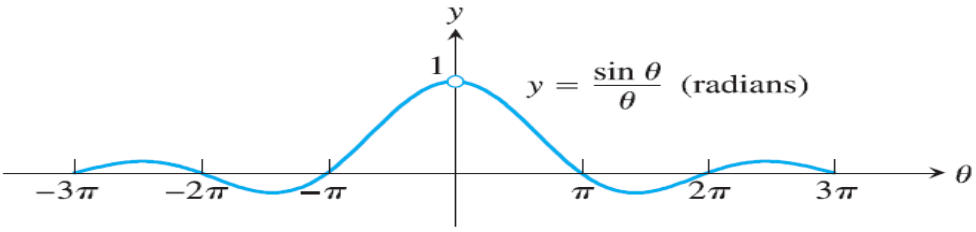


Thus, $\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ and $\lim_{x \to 0^-} \sin \frac{1}{x}$ d.n.e.

Limits Involving $(\sin\theta)/\theta$

THEOREM 7

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (\theta \text{ in radians})$$



Remark: One can easily show that

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1.$$

Examples: Find the following Limits:

1) a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

4) $\lim_{t\to \pi/2}\frac{\sin(t-\pi/2)}{t-\pi/2}$ 5) $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$.

sol: 1(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Put $\theta=3x$ so as $x\to 0$, $\theta=3x\to 0$

so, $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$. Thus, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\boxed{1}$.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}*\frac{3}{3}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{5}*1=\boxed{\frac{3}{5}}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

put $\theta = \sin x$, so as $x \to 0$, $\theta = \sin x \longrightarrow 0$

Thus, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = \boxed{1}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 8x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\dfrac{\tan 3x}{\sin 8x} = \dfrac{3\sin 3x}{3x} * \dfrac{1}{\cos 3x} * \dfrac{8x}{8\sin 8x}$, so

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 8x} = \dfrac{3}{8} \lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sin 3x}{3x} * \dfrac{1}{\cos 3x} * \dfrac{8x}{\sin 8x} \right]$

$= \dfrac{3}{8} * 1 * \dfrac{1}{1} * 1 = \boxed{\dfrac{3}{8}}$

4) $\lim\limits_{t \to \pi/2} \dfrac{\sin(t - \pi/2)}{t - \pi/2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Put $\theta = t - \pi/2 \Longrightarrow$ as $t \to \pi/2$, $\theta \to 0$

so $\lim\limits_{t \to \pi/2} \dfrac{\sin(t - \pi/2)}{t - \pi/2} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

5) IMP $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $* \dfrac{(\cos h + 1)}{\cos h + 1}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (-1) \left(\dfrac{\sin h}{h}\right) * \left(\dfrac{\sin h}{(\cos h + 1)}\right) = -1 * 1 * \dfrac{0}{2} = 0$

2 حل

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -2 \lim_{h \to 0} \left(\sin\left(\frac{h}{2}\right) * \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \right)$$

$$= -2 * \frac{1}{2} * 0 * 1 = \boxed{0}$$

هامش

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

2.5 Continuity

DEFINITION

Interior point: A function $y = f(x)$ is **continuous at an interior point c** of its domain if

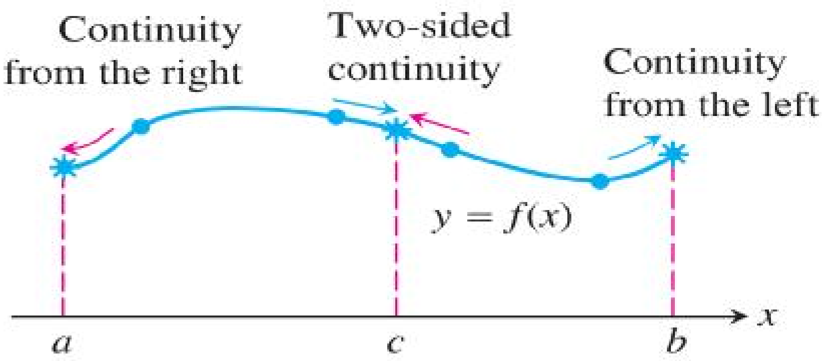
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Endpoint: A function $y = f(x)$ is **continuous at a left endpoint a** or is **continuous at a right endpoint b** of its domain if

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \quad \text{respectively.}$$

If a function f is not continuous at a point c, we say that f is **discontinuous** at c and that c is a **point of discontinuity** of f. Note that c need not be in the domain of f.

A function f is **right-continuous (continuous from the right)** at a point $x = c$ in its domain if $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. It is **left-continuous (continuous from the left)** at c if $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. Thus, a function is continuous at a left endpoint a of its domain if it

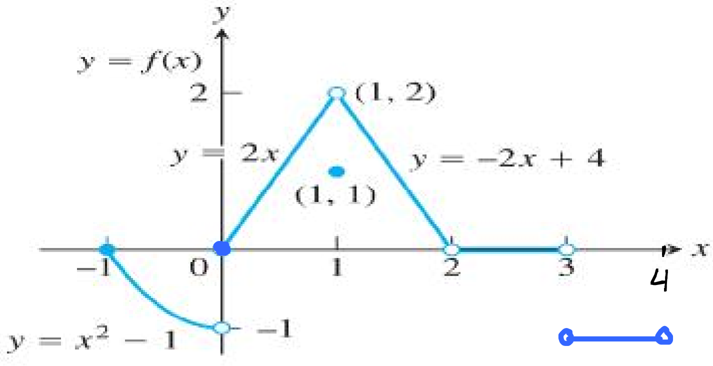


Continuity Test

A function $f(x)$ is continuous at an interior point $x = c$ of its domain if and only if it meets the following three conditions.

1. $f(c)$ exists (c lies in the domain of f).
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ exists (f has a limit as $x \to c$).
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (the limit equals the function value).

Example. Let $y = f(x)$ be a fun with graph shown below



then

1) At the left end point $x = -1$:

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$, so f is

a) Continuous from right at the left end point $x = -1$.

b) Continuous at $x = -1$.

2) At the right end point $x = 4$:

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0$, while f is undefined at $x = 4$

So f is discontinuous at $x = 4$.

3) At the interior points $x = 0, 1, 2, 3$, Not that

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Since

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, So, $\lim_{x \to 0} f(x)$ d.n.e.

Thus f is discontinuous at $x = 0$.

Note that $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, so,

f is right cont. at $x = 0$. (but not left cont.)

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 1$, So, f is discont. at $x = 1$.

c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$, while $f(2)$ is undefined

so f is discont. at $x = 2$.

d) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) = -1$, So

$\lim_{x \to 3} f(x)$ d.n.e. Moreover $f(3)$ is undefined

Thus, f is discont. at $x = 3$.

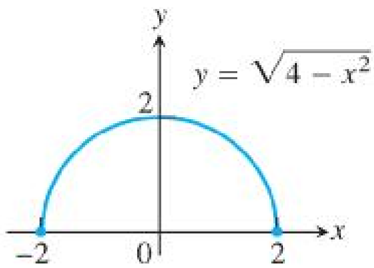
Remarks: 1) f is cont. at an interior point c iff it is both right and left cont.

2) f is cont. at left end point a iff it is right cont. at $x = a$.

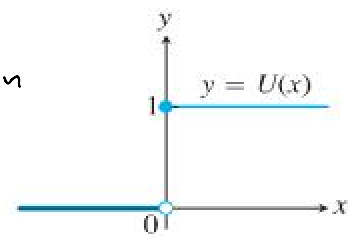
3) f is cont. at right end point b iff it is left cont. at $x = b$.

Def: We say that f is continuous fun if it is continuous at every point of its domain.

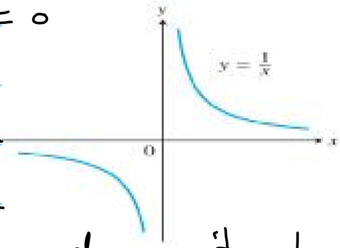
Examples 1) The fun $y = \sqrt{4 - x^2}$ is cont. fun since it is cont. on its domain $[-2, 2]$.



2) The unit step fun is discont. at $x = 0$. Since 0 is in the domain then $y = U(x)$ is not cont. fun

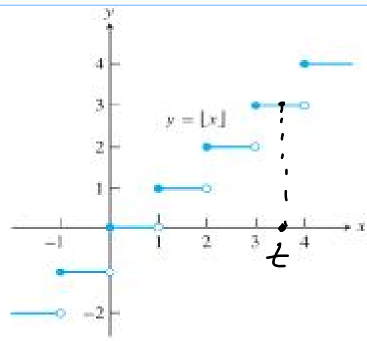


3) The fun $y = \frac{1}{x}$ is discont. at $x = 0$



and cont. at every point $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Since 0 is not in the domain of the fun, then f is cont. fun (it is cont. on its domain)

4) The fun $f(x) = \lfloor x \rfloor$ is cont. at every point $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ since $\lim_{x \to t} \lfloor x \rfloor = \lfloor t \rfloor$.



While $\forall\ t \in \mathbb{Z}$, we have

$t = \lfloor t \rfloor = \lim_{x \to t^+} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x \to t^-} \lfloor x \rfloor = t - 1$.

so $f(x)$ is discont. at every $x \in \mathbb{Z}$. In fact, it is right cont. at every $x \in \mathbb{Z}$. Since these points are in the domain of the fun, we have that $y = \lfloor x \rfloor$ is not cont. fun.

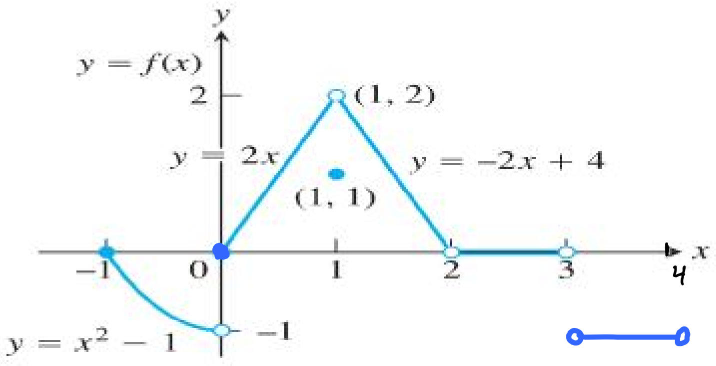
5) a) For any poly. $y = p(x)$, and any $c \in \mathbb{R}$, we prove that $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$. So all polys are continuous funs.

b) For any rational fun $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, and for any $c \in \mathbb{R}$ s.t. $q(c) \neq 0$ [this mean that $c \in D(R(x))$], we prove that

$$\lim_{x \to c} R(x) = R(c).$$

So all rational funs are cont. funs.

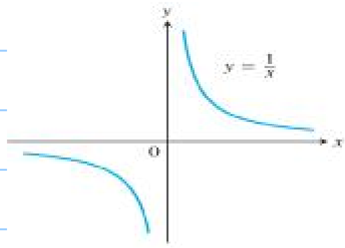
Remark: For the fun $y=f(x)$ of Example in page (2). Note that f is discont. at $x=0,1,2,3$.



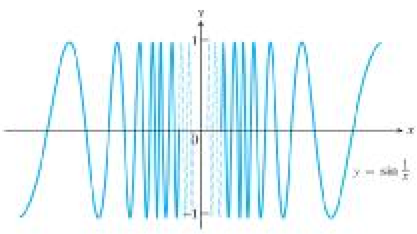
1) The discont. at the points 1, 2 are removable discontinuity, since the fun has a limit at these points, and we can remove the discontinuity by setting f at these points equal to the limits.

2) The discont. at the points 0 and 3 are not removable since the limit d.n.e. and there is no way to improve the situation by changing f at these points. The discont. at these point is called jumb discont.

3) The fun $y=\frac{1}{x}$ has infinit discontinuity at $x=0$



4) The fun $y=\sin\frac{1}{x}$ has oscillating discont. at $x=0$.



THEOREM 8—Properties of Continuous Functions If the functions f and g are continuous at $x = c$, then the following combinations are continuous at $x = c$.

1. *Sums:* $f + g$
2. *Differences:* $f - g$
3. *Constant multiples:* $k \cdot f$, for any number k
4. *Products:* $f \cdot g$
5. *Quotients:* f/g, provided $g(c) \neq 0$
6. *Powers:* f^n, n a positive integer
7. *Roots:* $\sqrt[n]{f}$, provided it is defined on an open interval containing c, where n is a positive integer

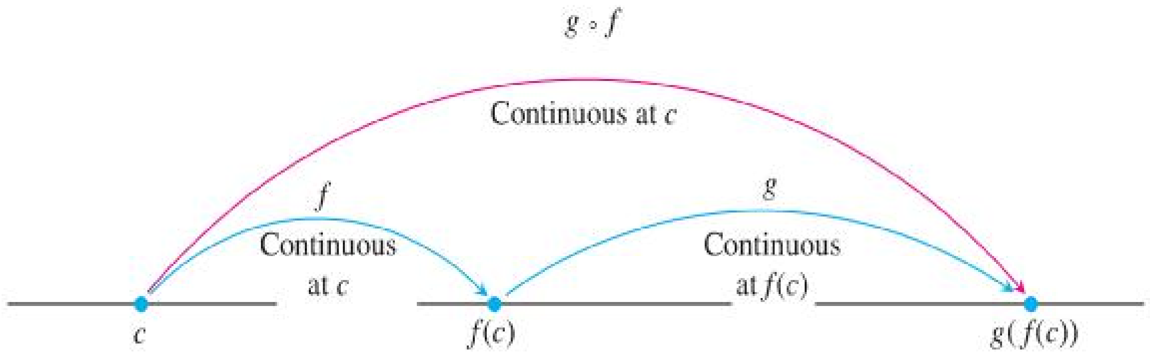


FIGURE 2.42 Composites of continuous functions are continuous.

THEOREM 9—Composite of Continuous Functions If f is continuous at c and g is continuous at $f(c)$, then the composite $g \circ f$ is continuous at c.

Examples: 1) Let $f(x) = x^4 + 20$ and $g(x) = 5x(x-2)$ be two polys. So both f and g are cont. on $\mathbb{R}$. The rational fun

$$R(x) = \frac{f}{g} = \frac{x^4 + 20}{5x(x-2)}$$

is cont. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$. In fact $R(x)$ is cont. fun, since $0, 2 \notin D(R(x))$.

2) The fun $y = |x|$ is cont. on $\mathbb{R}$, and the fun $g(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2+2}$ is cont. on $\mathbb{R}$ (Why?)

So, the composite fun

$$f \circ g(x) = \left| \frac{x \sin x}{x^2+2} \right| \text{ is cont. on } \mathbb{R}.$$

3) The funs $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ and $g(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ are continuous on

$$\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\tfrac{\pi}{2} : n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \right\}.$$

4) The fun $y = \sin x^2$ is the composite of the two funs $f = \sin x$ and $g = x^2$, so it is cont on $\mathbb{R}$.

5) The fun $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ is the composite of the two fun $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = x^2 - 2x - 5$ so it is cont. $\forall x \in \mathbb{R}$ s.t. $x^2 - 2x - 5 > 0$.

THEOREM 10—Limits of Continuous Functions If g is continuous at the point b and $\lim_{x \to c} f(x) = b$, then

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x \to c} f(x)).$$

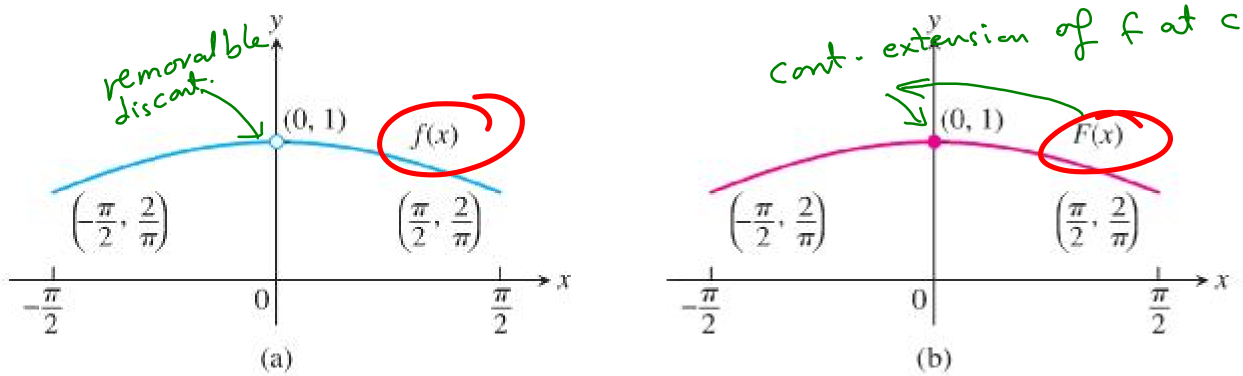
Example:

$$\lim_{x \to \pi/2} \cos\left(2x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(2x + \sin\left(\tfrac{3\pi}{2} + x\right)\right)\right)$$

$$= \cos\left(2 * \tfrac{\pi}{2} + \sin\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{3\pi}{2} + x\right)\right)\right)$$

$$= \cos(\pi + \sin 2\pi) = \boxed{-1}$$

Continuous extension to a point



If f has a removable discont. at $x=c$, in the case when $\lim_{x\to c} f = L \in \mathbb{R}$, then we say that f has a continuous extension at $x=c$. The fun

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ L, & x = c \end{cases}$$

is the cont. extension of f at c.

EXAMPLE 10 Show that

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}, \quad x \neq 2$$

has a continuous extension to $x = 2$, and find that extension.

Sol: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = 5/4$

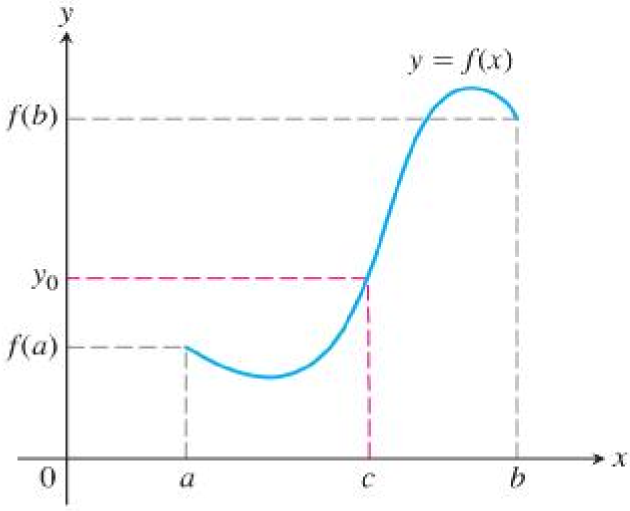
exists. So f has cont. extension at $x=2$.

Define

$$F(x) = \left.\begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}, & x \neq 2 \\ 5/4, & x = 2 \end{cases}\right\} = \frac{x+3}{x+2}$$

So $F(x)$ is cont. extension of f at $x=2$.

THEOREM 11—The Intermediate Value Theorem for Continuous Functions If f is a continuous function on a closed interval $[a, b]$, and if y_0 is any value between $f(a)$ and $f(b)$, then $y_0 = f(c)$ for some c in $[a, b]$.



الدالة المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ تأخذ جميع القيم بين
$f(a)$ و $f(b)$ ، وهندسياً ، فإن الخط الأفقي $y=y_0$ حيث y_0 قيمة
بين $f(a)$ و $f(b)$ يجب أنه يقطع منحنى الدالة في نقطة تكون عندها $x=c$ ،

وبالتالي : $f(c)=y_0$.

EXAMPLE 11 (1) Show that there is a root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$ between 1 and 2.

Sol: Let $f(x) = x^3 - x - 1$. Clearly f is cont. on $[1, 2]$. Note that

$f(1) = -1 < 0$ and $f(2) = 5 > 0$, so $y_0 = 0$ between $f(1)$ and $f(2)$, so $\exists\ c \in (1, 2)$ s.t.

$f(c) = y_0$ or $c^3 - c - 1 = 0$ $\square$.

(2) Explain why the eq $\cos x = x$ has at least one sol.

Sol: Define $f(x) = \cos x - x$ on the interval $I = [0, \pi/2]$. So

f is cont. on I, $f(0) = 1 > 0$ and

$f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$, so $y_0 = 0$ between

$f(0)$ and $f(\pi/2)$, by IVT, $\exists\, c \in I$ s.t.

$f(c) = y_0$ or $\cos c - c = 0$. Thus

$\cos c = c$. This proves that the point

c is a sol. of the eq $\cos x = x$. $\square$

Exercise: Let $f(x) = x^4 - x + 2$. Show that $\exists\, c \in \mathbb{R}$ s.t. $f(c) = 15$.

Hint: Find two points $a, b \in \mathbb{R}$ s.t. $f(a) < 15$ and $f(b) > 15$, then apply IVT for $y_0 = 15$.

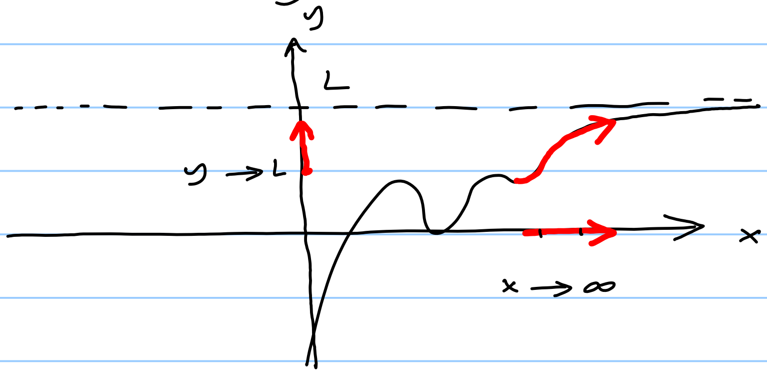
2.6 Limits Involving Infinity; Asymptotes of Graphs

Note Title ٢٢/١١/٢٦

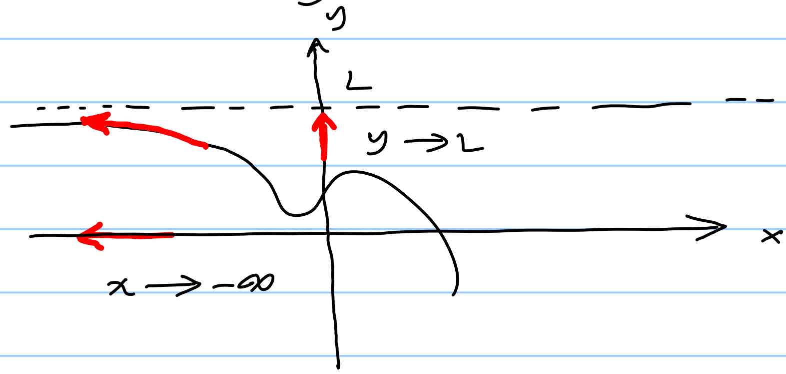
Finite Limits as $x \to \mp\infty$

Defs. (Informal def)

1) We say that $f(x)$ has the limit L as x approaches infinity and we write $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ iff as x moves increasingly far from the origin in the positive direction then $f(x)$ gets arbitrary closed to L.



(2) We say that $f(x)$ has the limit L as approaches minus infinity and we write $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ iff as x moves increasingly far from the origin in the negative direction then $f(x)$ gets arbitrary closed to L.

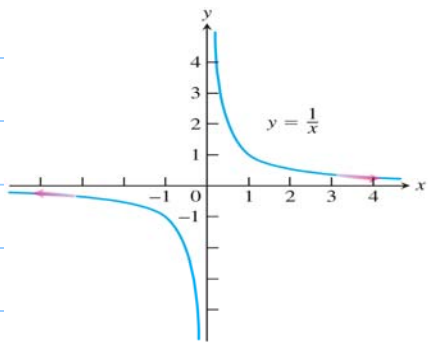


Examples: Show that

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ and $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

sol:

x	y
1	1
10	10^{-1}
10^{2}	10^{-2}
10^{5}	10^{-5}



تابع

x	y
10^{100}	10^{-100}

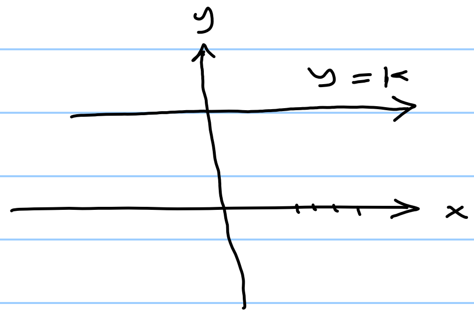
as $x \to \infty$, clearly $y \to 0$, so $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Sub b

x	y
-10	-10^{-1}
-10^{5}	-10^{-5}
$\vdots$	$\vdots$
-10^{100}	-10^{-100}

so, as $x \to -\infty$, clearly $y \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

2) $\lim_{x \to \mp\infty} k = k$.



sol:

x	y
1	k
10	k
10^{100}	k
-10	k
-10^{100}	k
$\vdots$	$\vdots$

clearly as $x \to \infty$, $y \to k$ and as $x \to -\infty$, also $y \to k$ so $\lim_{x \to \mp\infty} k = k$.

Thrm: If $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ and $\lim_{x \to \infty} g(x) = M$, then

1) $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) \mp g(x) \right) = L \mp M$.

2) $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = L \cdot M$, and $\lim_{x \to \infty} k f(x) = kL$.

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (provided $M \neq 0$)

4) $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) \right)^n = L^n$ (n is positive)

5) $\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (when n is even, $L > 0$)

ملحوظة: النظرية السابقة تبقى صحيحة عندما $x \to -\infty$.

Example: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} 5 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \pi\sqrt{3} \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$

$= 5 + 0 + \pi\sqrt{3} * 0 * 0 = \boxed{5}$

Limits at Infinity of Rational funs

To determine the limit of a rational function as $x \to \pm\infty$, we first divide the numerator and denominator by the highest power of x in the denominator. The result then depends on the degrees of the polynomials involved.

Examples: Find the following Limits:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

نقوم بقسمة البسط والمقام على x مرفوعة لأكبر أس في المقام.
حتى نستطيع توزيع النهاية على البسط والمقام

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 + 8/x - 3/x^2}{3 + 2/x^2} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} (5 + 8/x - 3/x^2)}{\lim\limits_{x \to \infty} (3 + 2/x^2)}.$$

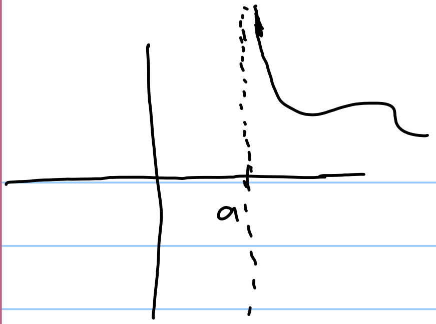
$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = 5/3 .$$

2) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{3x + 2}{5x^2 + 3x + 1} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{3/x + 2/x^2}{5 + 3/x + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{5 + 0 + 0} = \boxed{0}$

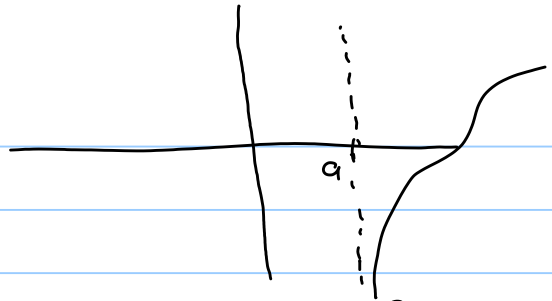
Infinit Limits

Defs: 1) We say that f goes to infinity as x approaches a from right (left) and we write $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty\right)$ if when $x \to a^+$, $f(x)$ grows without bounded in positive (negative) direction.

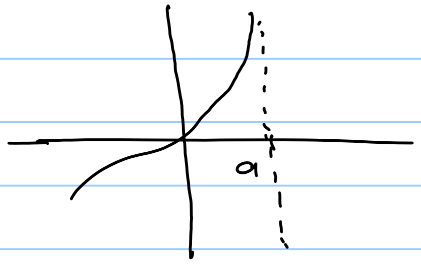
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \; (= -\infty)$ iff $\lim\limits_{x \to a^+} f = \lim\limits_{x \to a^-} f = \infty \; (-\infty)$.



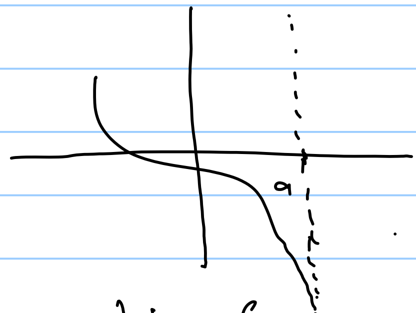
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$



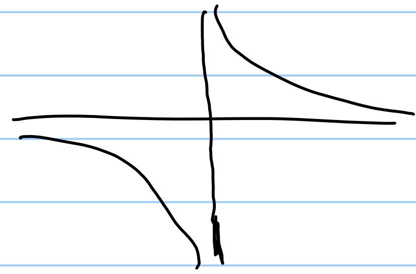
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty .$$

[تحدث هذه الحالة عندما ينتج التعويض المباشر الصيغة $\left(\frac{\text{رقم}}{0}\right)$ / لذلك يجب أخذ النهايات اليمنى واليسرى] .

Example:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{0^+}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$



since $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ so $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ d.n.e.

الحالات التي يجب فيها النظر إلى النهاية اليمنى واليسرى .

١- إذا كانت f معرفة على مجال $[a,b]$ له نقاط حدودية / فإن النهايات الممكنة عند هذه النقاط هي

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{and} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) .$$

٢- إذا كان للدالة نقطة تحول عند النقطة a (piecewise def)

$$f(x) = \begin{cases} \text{قانون}_1 , & x \geq a \\ \text{قانون}_2 , & x < a \end{cases}$$

فإن النهاية عند a يجب النظر فيها للنهاية اليمنى واليسرى .

تنبيه : يدخل من هذه الحالة الدوال المطلقة $|\ |$ ، والدوال الدرجية $⌊\ ⌋$.

٣- إذا كان التعويض المباشر للنهاية ينتج الصيغة $\left(\frac{\text{رقم}}{0}\right)$.

Examples:

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{(1-x)^2} \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(1-x)^2} \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = \infty$

$\left.\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$

(لا نحتاج أخذ النهاية اليمين واليسار)

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-2} \left(\dfrac{4}{0}\right)$

consider $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} \left(\dfrac{4}{0^-}\right) = -\infty$ and $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} \left(\dfrac{4}{0^+}\right) = \infty$

So $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$ d.n.e.

4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-1}{(x-2)^2} \left(\dfrac{-1}{0}\right)$

consider $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-1}{(x-2)^2} \left(\dfrac{-1}{0^+}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-1}{(x-2)^2} \left(\dfrac{-1}{0^+}\right) = -\infty$

So $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3} = -\infty$.

5) (a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

(a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3}{x} = 1$ and

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{3}. \text{ So } \lim_{x\to 3} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \text{ d.n.e.}$$

b) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} \left(\frac{-1}{0^-}\right) = \infty \text{ and}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

so $\lim_{x\to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ d.n.e.

6) $$\lim_{x\to 0} \sqrt{2x^2}\, \frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{2}\, \frac{|x|}{x} \cos x$$

cosider

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{2}\, \frac{x}{x} \cos x = \sqrt{2}$$

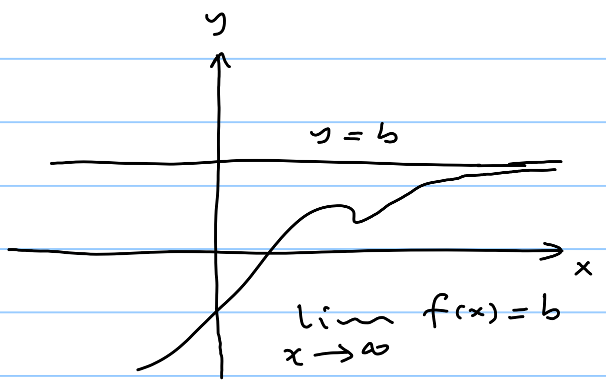
$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}\, \frac{(-x)}{x} \cos x = -\sqrt{2}$$

so $\lim_{x\to 0} \sqrt{2x^2}\, \frac{\cos x}{x}$ d.n.e.

Horizontal and Vertical Asymptotes

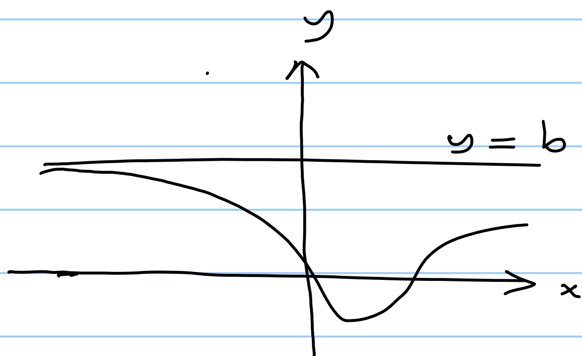
DEFINITION A line $y = b$ is a **horizontal asymptote** of the graph of a function $y = f(x)$ if either

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{or} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

So $\boxed{y = b}$ is h.a.

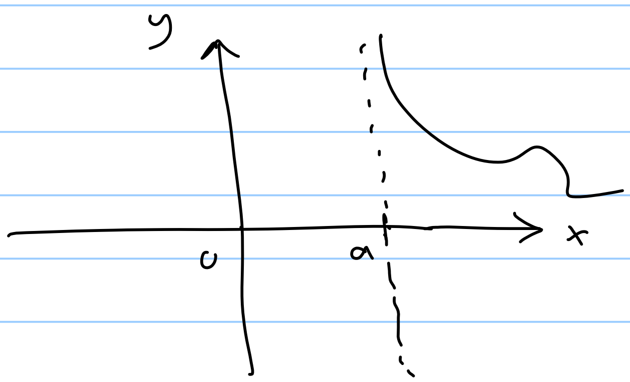


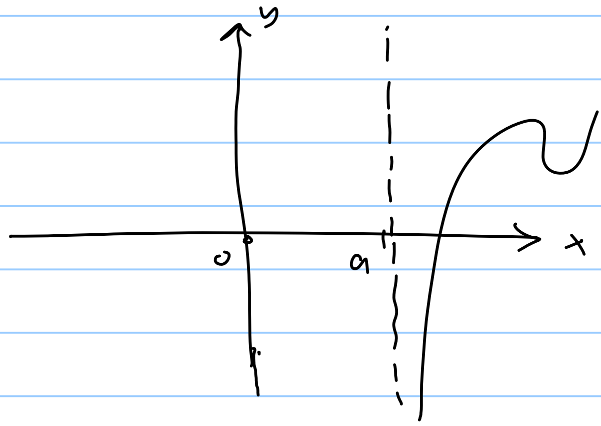
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

so $\boxed{y = b}$ is h.a.

DEFINITION A line $x = a$ is a **vertical asymptote** of the graph of a function $y = f(x)$ if either

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty .$$





$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ so $\boxed{x = a}$ is v.a.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ so $\boxed{x = a}$ is v.a.

بالمثل عند $x \to a^-$.

Illustration For the fun $y = \frac{1}{x}$.

(a) Since $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

so $\boxed{x = 0}$ ← محور y is 2-sided v.a.

(b) Since $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$, so

$\boxed{y = 0}$ ← محور x is 2-sided h.a.

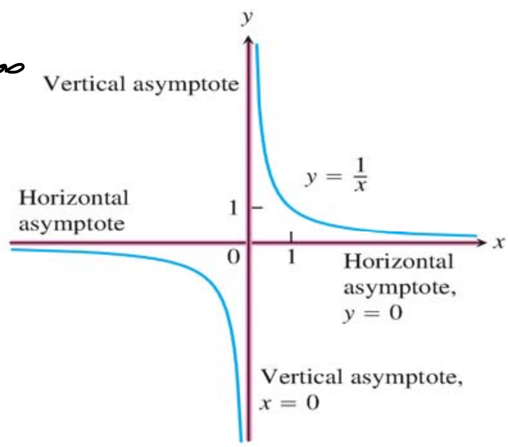


FIGURE 2.62 The coordinate axes are asymptotes of both branches of the hyperbola $y = 1/x$.

Examples: Find the horizontal and Vertical asymptotes for the following funs:

1) $y = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$.

sol: h.a: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{x+2} = 1$ and $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = 1$

so $\boxed{y=1}$ is 2-sided h.a.

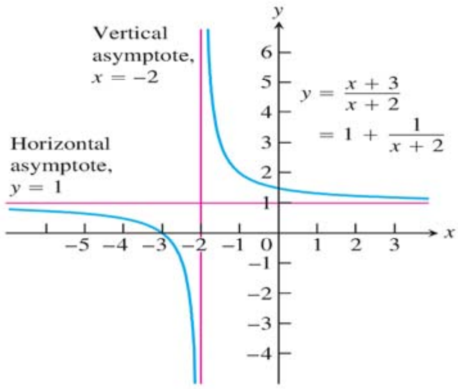
v.a.

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+3}{x+2} \left(\frac{1}{0^+}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2} \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

so $\boxed{x=2}$ is 2-sided v.a.

(look at the figure)



2) $f(x) = \dfrac{-8}{x^2-4}$.

Sol:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-8}{x^2-4} = 0$$

so $\boxed{y=0}$ (x-axis) is two sided h.a.

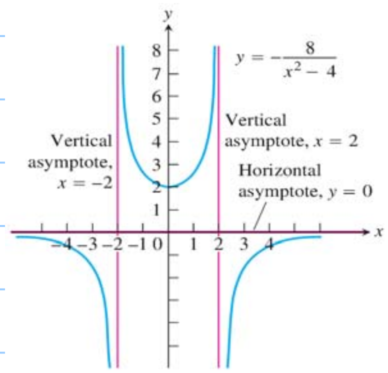
Now, we are interested the vertical asy. at $x = \mp 2$ which are the zero of denominator.

at $x=2$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-8}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-8}{(x-2)(x+2)} \left(\frac{-}{0^+}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-8}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-8}{(x-2)(x+2)} \left(\frac{-}{0^-}\right) = \infty$$

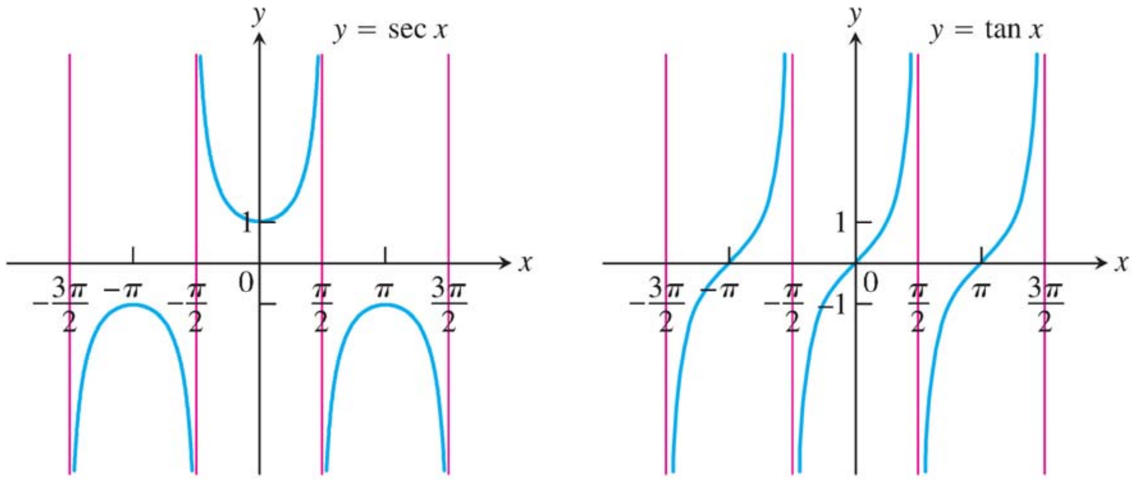
so $\boxed{x=2}$ is 2-sided v.a.



3) The funs

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{and} \qquad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

both have vertical asymptotes at odd-integer multiples of $\pi/2$, where $\cos x = 0$ (Figure 2.65).



4) $y = 2 + \dfrac{\sin x}{x}$.

sol: at $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} 2 + \frac{\sin x}{x} = 2 + 1 = 3 \neq \mp\infty$$

so there is no v. a.

Now, to find $\displaystyle\lim_{x \to \mp\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)$, note firstly that

$$0 \leq |\sin x| \leq 1 \quad \text{so}$$

$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$$

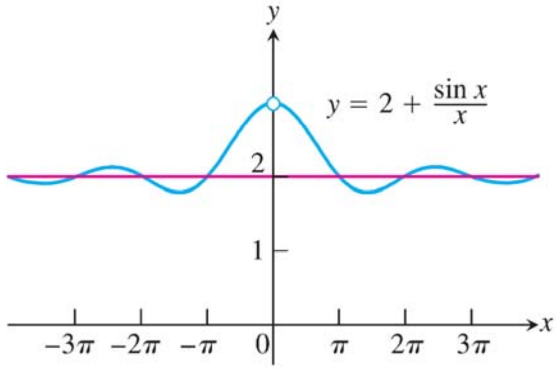
as $x \to \mp\infty$: $0 \to 0$, $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \to 0$, $\dfrac{1}{|x|} \to 0$

so by Sandwich Thrm, $\displaystyle\lim_{x \to \mp\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0$ and

so $\displaystyle\lim_{x \to \mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Therefore, $\lim_{x \to \mp\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$

Thus, $\boxed{y = 2}$ is 2-sided h.a.



Oblique Asymptotes

If the degree of the numerator of a rational function is 1 greater than the degree of the denominator, the graph has an **oblique** or **slant line asymptote**. We find an equation for the asymptote by dividing numerator by denominator to express f as a linear function plus a remainder that goes to zero as $x \to \pm\infty$.

ملحوظة : تكون خط التقارب المائل للدالة بسبب أنه خارج القسمة هي معادلة خط مستقيم وبالتالي فإنه عندما تكون $|x|$ كبيرة فإن باقي القسمة تكون قيمة قريبة من الصفر وبالتالي فإن قيم الدالة تكون قريبة جداً من قيم الخط المستقيم .

Examples:

1) Find the asymptotes of the fun

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

sol: بالقسمة المطولة

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2x - 4} \right)$$

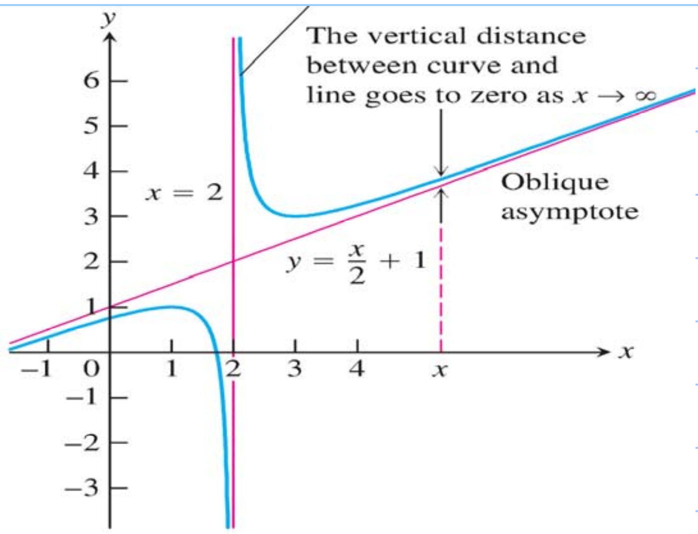
لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام بواحد فإن للدالة خط تقارب مائل وهو خارج القسمة وبالتالي فإن

$\boxed{y = \frac{x}{2} + 1}$ is o.a.

لا يوجد خط تقارب أفقي لأنه لا يمكن أن يكون لدالة واحدة خط تقارب أفقي ومائل وإلا لا تكون دالة .

Consider $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \infty$, $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = -\infty$

so $\boxed{x = 2}$ is 2-sided v.a.



2) Find the oblique asymptotes of the fun

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x+4}.$$

sol: After longe division, $f(x) = \left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right) - \frac{115}{49(7x+4)}$

so $y = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ is o.a. and for $|x|$ large

we have that $f(x) \simeq \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ and $\frac{-115}{49(7x+4)} \simeq 0$

End of chapter 2

3.2 The Derivatives as a function

Note Title ٣٢/١٢/٠٤

تعرف مشتقة دالة ما $y=f(x)$ عند نقطة x_0 في مجالها على أنها الرقم

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بشرط وجود النهاية})$$

وهذا الرقم يمثل ميل الخط المماس لمنحنى الدالة $y=f(x)$ عند $x=x_0$)
" slope of the tangent to the curve at x_0 "
ويعرف أيضاً على أنه ميل المنحنى " slope of the curve ".
هنا سنقوم بتعريف المشتقة كدالة.

DEFINITION The **derivative** of the function $f(x)$ with respect to the variable x is the function f' whose value at x is

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

provided the limit exists.

If f' exist at a point c, we say f is differentiable at c (or has a drivative at c).

If f is differentiable at every point of its domain, we say that f is <u>differentiable fun</u>.

Remarks:

1) The domain of the fun $f'(x)$ is all x in domain f where f is differentiable.

2) There are some common alternative notations for the derivative of $f(x)$:

$$f'(x) = y' = \boxed{\frac{dy}{dx}} = \boxed{\frac{df}{dx}} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

3) The slope of the curve (or of the tangent to the curve) at a point a is egnal to $f'(a)$.

4) If we replace $z = x + h$ we get another form for the derivative which is

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Examples: Find $\frac{dy}{dx}$ if

1) $y = \sqrt{x}$, $x > 0$. Then compute $f'(4)$.

sol:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$ بالضرب بالمرافق

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} * \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \qquad x > 0$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$.

sol:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\left(\frac{x+h}{x+h-1}\right) - \left(\frac{x}{x-1}\right)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \left[\frac{-\cancel{h}}{(x+h-1)(x-1)}\right] = \frac{-1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Defferentiation on an Interval; One Sided Derivative

Def: 1) The right-hand derivative of $f(x)$ at a is the number

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2) The left-hand derivative of $f(x)$ at a is the number

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

3) A fun $y = f(x)$ is differentiable on an open interval (a,b) if it is differentiable at each point in (a,b).

4) A fun $y = f(x)$ is differentiable on a closed interval $[a,b]$ if it is differentiable on (a,b) and has a right-hand (left-hand) derivative at a (b).

ملحوظات: 1) عند نقطة داخلية c ، تكون $f'(c)$ موجودة إذا كانت المشتقات اليمنى واليسرى موجودتين ومتساويتين .

2) في الدوال المعرفة بأكثر من قانون (pecicewise def) وعند نقاط التحول لهذه الدوال ، فإنه لإيجاد f' عندها يلزمنا حساب المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى للدالة .

Example: Let

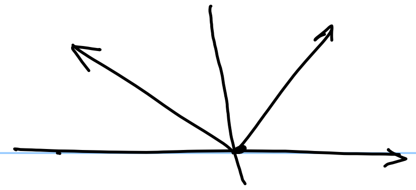
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x , & x \geq 0 \\ -x , & x < 0 . \end{cases}$$

Find $f'(0)$ if it exists.

Sol: Consider the right-hand derivative.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

and the left-hand derivative.



$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}-1=-1.$$

since the right-hand derivative $\neq$ the left-hand derivative then $f'(0)$ d.n.e.

2) Explain if the right hand derivative of $f(x)=\sqrt{x}$ exists at $x=0$ or not?

sol: $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$ ni لاحظ ض البداية

so

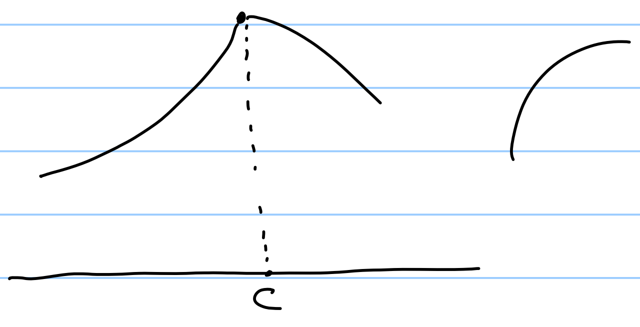
$$f'_{(+)}(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}\ \left(\frac{1}{0^+}\right)=\infty\notin\mathbb{R}$$

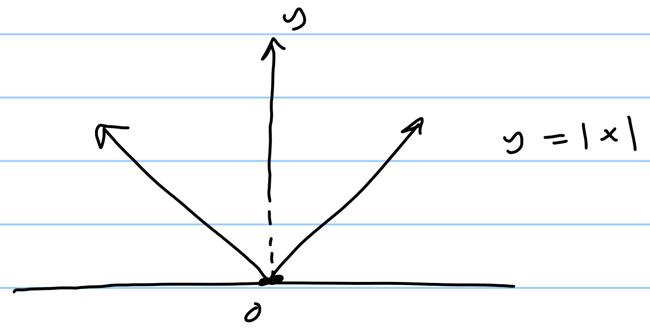
So f hasn't right-hand derivative at $x=0$

الحالات التي تكون فيها الدالة غير قابلة للإشتقاق

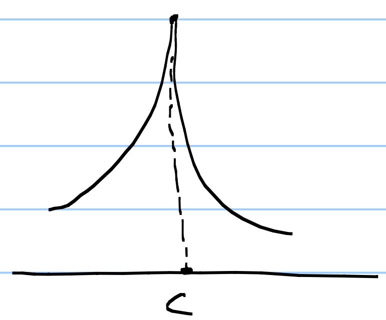
1. عند الزوايا (At the corner).

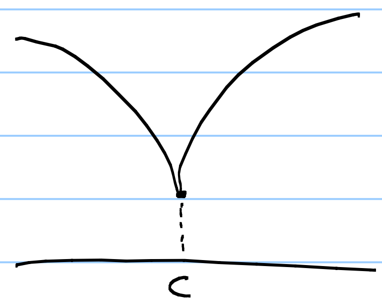
في هذه الحالة تكون المشتقة اليمنى عند هذه النقاط غير مساوية للمشتقة اليسرى.



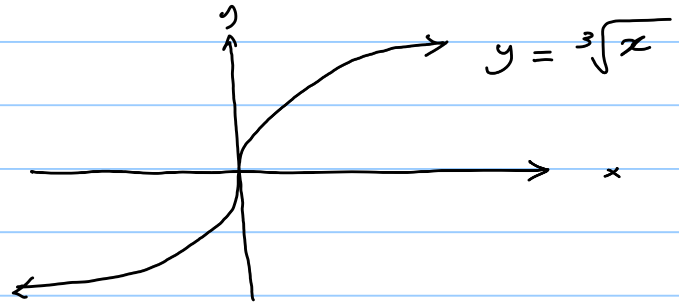


2. عند الحواف المدببة (At the cusp).

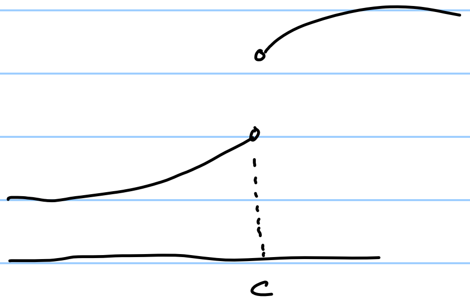


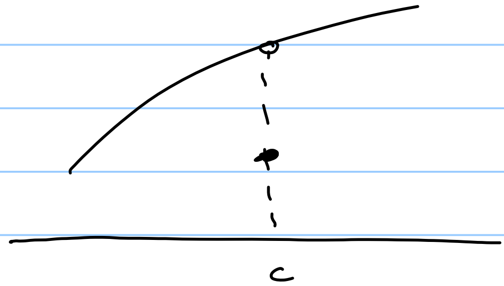


3- عندما يكون للمنحنى مماساً عمودياً :



4- عند نقاط عدم الإتصال :





THEOREM 1—Differentiability Implies Continuity If f has a derivative at $x = c$, then f is continuous at $x = c$.

قابلية الإشتقاق عند نقطة c تؤدي للإتصال عند هذه النقطة .

PF: We must show that $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, so note that

$$f(x) = f(x) - f(c) + f(c)$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c) + f(c)$$

Taking $\lim_{x \to c}$ to both sides, we get

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) * \lim_{x \to c}(x - c) + \lim_{x \to c} f(c)$$

$$= f'(c) * 0 + f(c) = f(c) \qquad \square$$

ملحوظات هامة : ١- النظرية السابقة تكافئ النص التالي :

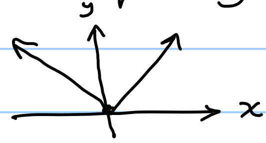
"If f is discont. at $x=c$, then f is not diff. at c"

"عدم الاتصال $\Leftarrow$ عدم قابلية الاشتقاق"

وهي النقطة الرابعة من الحالات السابقة من حالات عدم وجود المشتقة .

٢- **عكس النظرية غير صحيح** / فإذا كانت الدالة متصلة / فليس بالضرورة أن تكون قابلة للاشتقاق / مثل حالة الزوايا أو الحواف المدببة

(انظر دالة $y = |x|$ / فهي متصلة عند $x=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق)



3.3 Differentiation Rules

Note Title ٢٢/١٢/١٥

Thrm Suppose that f, g are two differentiable funs, c is a constant, and n is any real number. Then

1) $\frac{d}{dx} c = 0$.

$\left(\frac{d}{dx} 3 = 0, \quad \frac{d}{dx}(-5) = 0 \right)$.

2) $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$.

$\left(\frac{d}{dx} x = 1, \quad \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d}{dx} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} x^{-5/2} \right)$

3) $\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$.

$\left(\frac{d}{dx}(3x^{10}) = 3 \frac{d}{dx}(x^{10}) = 3 * 10 x^9 = 30 x^9 \right)$

4) $\frac{d}{dx}\big(f(x) \mp g(x) \big) = \frac{d}{dx} f(x) \mp \frac{d}{dx} g(x)$.

$\left(\frac{d}{dx}(x^3 + \sqrt{x}) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

5) $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f g' + g \cdot f'$

$\left(\frac{d}{dx}(x^2+1)(x^3-3) = (x^2+1)\, 3x^2 + 2x\,(x^3-3) \right)$

6) $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$\left(\frac{d}{dx} \frac{x^2+1}{x^3-3} = \frac{(x^3-3) \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 3x^2}{(x^3-3)^2} . \right)$

Examples:

1) Find $\acute{y}$ if $y = \sqrt[3]{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$.

sol: $y = x^{1/3}\left(x^2 + x^{-1}\right) \Longrightarrow$

$$\acute{y} = x^{1/3}\left(2x - x^{-2}\right) + \left(x^2 + x^{-1}\right) \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$= \sqrt[3]{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2) Does the curve $y = x^4 - 2x^2 + 2$ have any horizontal tangent? If so, where?.

sol:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 4x(x-1)(x+1)$$

The slope of horizontal tangent $= 0$, so

$\frac{dy}{dx} = 0$ at $x = 0, 1, -1$.

3) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \left(\frac{x^2 + 3}{12x}\right)\left(\frac{x^4 - 1}{x^3}\right)$

sol: في حال قمنا بتطبيق قوانين الإشتقاق مباشرةً على عمليات الضرب و القسمة فإن الحل سيكون طويل وصعب ، لذلك نفضل هنا تبسيط قيمة y كما يأتي :

$$y = \frac{x^6 - x^2 + 3x^4 - 3}{12x^4} = \frac{x^2}{12} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^4}$$

so

$$\acute{y} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^{-3} + 0 + x^{-5} = \frac{x}{6} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^5}$$

4) If $f(2) = 3$, $\acute{f}(2) = -4$, $g(2) = 1$ and $g'(2) = 2$, then find $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$, where $y = f \cdot g(x)$.

sol: $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = f\cdot g' + g\cdot f' = f(2)\cdot g'(2) + g(2)\,f'(2)$$
$$= 3 * 2 + 1 * (-4) = 2.$$

Def: The normal line to a curve $y=f(x)$ at x_0 is the line passes through the point $(x_0, f(x_0))$ perpendicular to the tangent line to the curve at x_0.

Example: Find the equations of the tangent and normal lines to the curve $y = x + \frac{2}{x}$ at $x=1$.

sol: At $x = 1$, $y = f(1) = 3$. Moreover, the slope of the tangent line is $m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
$= 1 - 2/x^2 \big|_{x=1} = -1.$

Equation for Tangent line: $m_t = -1$ and $P(1,3)$, so

$$y = m(x - x_0) + y_0$$
$$= -1(x-1) + 3 = \boxed{-x+4}$$

Eq. for Normal line: $P(1,3)$, $m_\perp = \frac{-1}{m_t} = 1$

so $$y = 1(x-1) + 3 = \boxed{x+2}$$

Example: Find the values of a and b that make the fun

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & x \le 1 \\ 4x + b & x > 1 \end{cases}$$

differentiable for all x.

sol: جميع نقاط $x>1$ و $x<1$، الدالة قابلة للإشتقاق لأنه تعريفها هي حدوديات على هذه الفترات / لذلك فإن النقطة الوحيدة التي نحتاج نفحص هي نقطة تحول تعريف الدالة $x=1$. عند هذه النقطة، ولكي تكون الدالة قابلة للإشتقاق يجب أن تكون متصلة وعليه فإن

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow a - 2 = 4 + b \quad \text{----}(1)$$

Moreover,

$$f'^{(+)}(1) = f'^{(-)}(1) \Rightarrow 4 = 2a\,x\big|_{x=1} \Rightarrow \boxed{a=2} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{b=-4}$$

Second and Higher Derivatives

We define the second and higher derivatives as follows:

$$\underbrace{y'' \left(= \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = D_{xx} = \ddot{y}\right)}_{\text{رموز مختلفة للمشتقة الثانية.}} := \underbrace{\frac{d}{dx} f'(x)}_{\text{تعريف المشتقة الثانية}} .$$

المشتقة الثانية هي مشتقة دالة المشتقة الأولى.

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(f''(x)\right),$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right).$$

Illustration: If $y = 2x^3 - 3x - 1$, then

$y' = 6x^2 - 3$, $y'' = 12x$, $y''' = 12$, and

$$y^{(4)} = y^{(5)} = \cdots = y^{(n)} = \cdots = 0 \qquad \forall n \geq 4.$$

3.5 Derivatives of Trigonometric Funs

Thrm:

1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

5) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$.

6) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

PF: 1) $\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \, \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

$$= \sin x * 0 + \cos x * 1 = \cos x.$$

3) $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

The points ②, ④, ⑤, ⑥ are exercise.

Examples:

1) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

2) $$\frac{d}{dx}\Big((\sec x + \tan x)\csc x\Big)$$

$$= (\sec x + \tan x) * (-\csc x \cot x) +$$

$$\csc x\,(\sec x \tan x + \sec^2 x).$$

3) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\cos x}{1-\sin x}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin x)\left[x^2 * -\sin x + 2x\cos x\right] - x^2\cos x * (0 - \cos x)}{(1-\sin x)^2}.$$

يمكن اجراء عملية تبسيط للمقدار باجراء حساب البسط .

4) Find y'' if $y = \sec x$.

sol:

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'' = \sec x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot \sec x \tan x$$

$$= \sec x\,(\sec^2 x + \tan^2 x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x.$$

Continuity of Trigonometric funs

نظرية : لأن الدوال المثلثية جميعها هي دوال متصلة، فإنه يمكن حساب النهايات للدوال المثلثية بإجراء التعويض المباشر بشرط ألا يؤدي ـــــ

لقسمة على صفر ، انظر المثال التالي

Example:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = \boxed{-\sqrt{3}}$$

3.6 The Chain Rule (قانون السلسلة)

Note Title ٢٢/١٢/١٥

Derivative of Composite fun

THEOREM 2—The Chain Rule If $f(u)$ is differentiable at the point $u = g(x)$ and $g(x)$ is differentiable at x, then the composite function $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ is differentiable at x, and

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

In Leibniz's notation, if $y = f(u)$ and $u = g(x)$, then

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},}$$ صورة أخرى

where dy/du is evaluated at $u = g(x)$.

Illustration If $y = \sqrt{u}$ and $u = x^2 + 1$

then $y = \sqrt{x^2+1}$. Find $\frac{dy}{dx}$.

Sol: a) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{u}}$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) We can look at y as $y = f(g(x))$ where $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = x^2+1$, so

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ـ النظرية السابقة تحكي ملاحظة التالي:

$(f \circ g)' = \frac{d}{dx} \underset{\text{الخارج}}{f}(\underset{\text{الداخل}}{g(x)}) = \underset{\text{مشتقة الخارج}}{f'}(\underset{\text{الداخل كما هي}}{g(x)}) * \underset{\text{مشتقة الداخل}}{g'(x)}$

Examples: Find $\frac{dy}{dx}$.

1) $$\frac{d}{dx}\sin(\underbrace{x^2+x}_{\text{inside}}) = \cos(\underbrace{x^2+x}_{\text{inside left alone}})\cdot(\underbrace{2x+1}_{\text{derivative of the inside}}).$$

2) $$y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$$

$$y' = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) * \frac{(1+\cos x)\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{1+\cos x} * \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

3) $$y = \tan\left(5 - \sin^{-2}(2x)\right)^4$$

sol: $$\frac{dy}{dx} = \sec^2\left(5-\sin^{-2}(2x)\right)^4 * 4\left(5-\sin^{-2}(2x)\right)^3 *$$

$$\left(0 - \left[-2\sin^{-3}(2x) * \cos(2x) * 2\right]\right)$$

$$= 16\cos 2x \sin^{-3} 2x \left(5-\sin^{-2} 2x\right)^3 \sec^2\left(5-\sin^{-2} 2x\right)^4.$$

4) $$y = \left(f(\sec x)\right)^3$$

$$y' = 3\left(f(\sec x)\right)^2 * f'(\sec x) * \sec x \tan x.$$

5) Find $\frac{d}{dx}|x|$

sol: حل ١ يمكننا إيجاد المشتقة باستخدام إعادة التعريف كما يلي

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

so $$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

at $x = 0$, we prove that the right-hand derivative $f'^{(+)}(0) = 1$ and the left-hand derivative $f'^{(-)}(0) = -1$ so $f'(0)$ d.n.e.

2nd Note that $|x| = \sqrt{x^2}$ so

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

but $$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 . \end{cases}$$

6) Prove that the slope of each line tangent to the curve $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ is positive.

sol: The derivative of y is

$$y' = \frac{d}{dx}(1-2x)^{-3} = -3(1-2x)^{-4} * -2 = \frac{6}{(1-2x)^4}$$

so at any point (x, y) on the curve where $x \neq \frac{1}{2}$

$y' > 0$, so the slope of any tangent line is positive.

(7) Find $\frac{dy}{dx}$ at $x = 2$ if $y = f^{-2}(x)\, g^{3}(x)$ and $f(2) = 3$,

$g(2) = -1$, $f'(2) = -9$, and $g'(2) = 1$.

$\underline{\text{sol:}}$ $y' = f^{-2}(x) \cdot 3g^{2}(x)\, g'(x) + (-2) f^{-3}(x) f'(x)\, g^{3}(x).$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = (3)^{-2} * 3 * (-1)^{2} * 1 + (-2)(3)^{-3} * (-9) * (-1)^{3}$$
$$= 1/3 - 2/3 = \boxed{-1/3}$$

8) Find $g'(1)$ if $g(x) = f(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)}$ and $f(1) = 4$, $f'(1) = 8$.

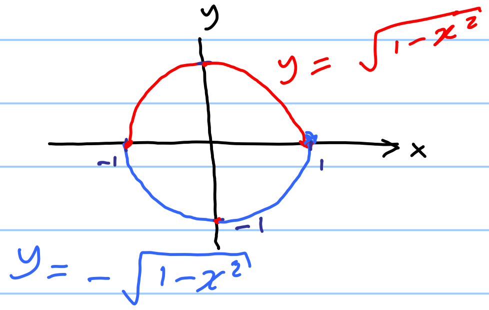
$\underline{\text{sol:}}$

$$g'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x).$$

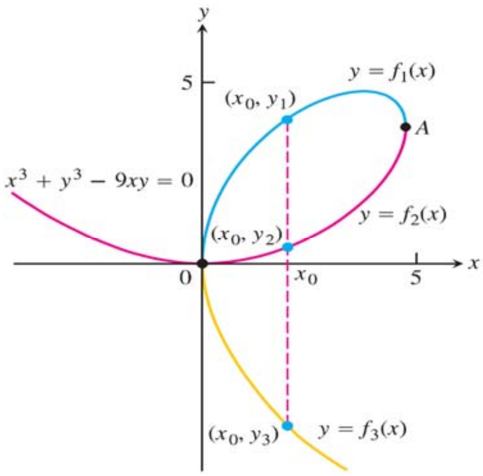
$$\Rightarrow g'(1) = f'(1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} \cdot f'(1) = \frac{8}{2} + \frac{1}{4} \cdot 8 = \boxed{6}$$

3.7 Implicit Differentiation (الإشتقاق الضمني)

مقدمة: تعتبر العلاقات $y=f(x)$ علاقات دالة صريحة لـ y في x (explicit relation)، أما العلاقات $f(x,y)=c$ فهي علاقات قد لا تمثل دوال، ولكنها تعرف دوالاً ضمنية (implicit relation)، مثال ذلك أن الدائرة $x^2+y^2=1$ وهي ليست دالة، لكنها تعرف دالتين، انظر الرسمة.



مثال آخر لتوضيح العلاقات الضمنية، انظر إلى رسمة المنحنى $x^3+y^3-9xy=0$



واضح أن العلاقة ليست علاقة دالة، لكنها يمكن أن تعرف عدة دوال منها، الأولى $y=f_1(x)$، والثانية $y=f_2(x)$ والثالثة $y=f_3(x)$.

الإشتقاق الضمني: بداية الإشتقاق تعرف للدوال، لذلك فإنه إذا أردنا إشتقاق الدائرة $x^2+y^2=1$، فإن المقصود هنا هو إشتقاق إحدى الدالتين $y_1=\sqrt{1-x^2}$ أو $y_2=-\sqrt{1-x^2}$، وذلك حسب موقع النقطة المراد إيجاد الإشتقاق عندها. والدالتان y_1, y_2 هما علاقات صريحة، والدائرة $x^2+y^2=1$ تمثل علاقة ضمنية لهما.

لإيجاد الإشتقاق للعلاقة الضمنية فإنه ليس بالضرورة تحويل العلاقات الضمنية إلى علاقات صريحة، حيث أنه يمكن إيجاد الإشتقاق ضمنياً وذلك على إعتبار أن كل من x و y هما دوال في x ونستخدم فيه قوانين السلسلة كما يوضح المثال التالي:

Illustration: For the eq $x = y^2$, find $\frac{dy}{dx}$.

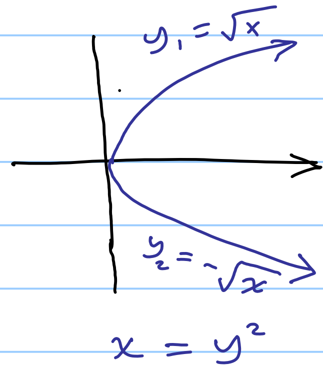
Sol:

(حل 1) $x = y^2$ هي علاقة ضمنية / يمكننا ايجاد ماتعرفه من دوال
بإيجاد قيمة y كما تالي

$$\sqrt{x} = |y| \Rightarrow y = \mp\sqrt{x}$$

$\therefore$ $y_1 = \sqrt{x}$, $y \geq 0$ and

$y_2 = -\sqrt{x}$, $y \leq 0$



$$\therefore \frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & y > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{x}}, & y < 0 \end{cases}$$

Note that, if $y > 0$, then $y = \sqrt{x}$. In this case

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}, \quad \text{and}$$

if $y < 0$, then $y = -\sqrt{x}$. In this case,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = \frac{1}{2y}.$$

So, in both cases, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$.

(حل 2) بدون إيجاد الدوال بشكل صريح / لاحظ أن

$$x = y^2$$

اشتق الطرفين على اعتبار أن كل من x / y هي دوال في x مع استخدام
قانون السلسلة نحصل على

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx} y^2 \Rightarrow 1 = 2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}}$$

نفس ما حصلنا عليه في حل 1 ولكن بشكل مباشر وسريع

ملاحظات: 1) في كثير من الأحيان لا نستطيع إيجاد الدوال التي تعرف بشكل
صريح كما في العلاقة $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

2) الإشتقاق الضمني نحصل فيه على الإشتقاق $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x و y ويشتمل في داخله
على إشتقاق كل الدوال التي تعرفها العلاقة الضمنية.

Examples:

1) Find dy/dx if

a) $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

sol: $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9\left(x \frac{dy}{dx} + y\right) = 0$

$3y^2 \frac{dy}{dx} - 9x \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 9y$

$\therefore \frac{dy}{dx}(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2 \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

b) $\sin(xy) - \sqrt{x^2 + y^2} = 2y^2$

sol: $\cos(xy)(xy' + y) - \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x + 2yy') = 4yy'$

$\Rightarrow y'\left(x\cos xy - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4y\right) = -y\cos xy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\therefore y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4y}.$$

c) $x^3 = \frac{2x - y}{x + y^3}$

sol: $x^4 + x^3 y^3 = 2x - y \Rightarrow$

$4x^3 + x^3 \cdot 3y^2 y' + y^3 \cdot 3x^2 = 2 - y'$

$\therefore y'(3x^3y^2 + 1) = 2 - 4x^3 - 3x^2y^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 3x^2y^3}{3x^3y^2 + 1}.$$

2) Show that the point $p(2,4)$ lies on the curve $x^3 + y^3 - 9xy = 0$, then find the eqs of tangent and normal lines at p.

sol: $2^3 + 4^3 - 9 * 2 * 4 = 0 \implies p(2,4) \in$ Graph of the curve.

Now, from (1) part (a) above, we get

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

so $m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_p = \frac{3 * 4 - 2^2}{4^2 - 3 * 2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Tangent: $p(2,4)$, $m_t = \frac{4}{5} \implies$

$$y = \frac{4}{5}(x-2) + 4 = \boxed{\frac{4}{5}x + \frac{12}{5}}.$$

normal: $p(2,4)$, $m_\perp = \frac{-1}{m_t} = \frac{-5}{4}$.

so $y = \frac{-5}{4}(x-2) + 4 = \boxed{\frac{-5}{4}x + \frac{13}{2}}$

3) Find $\frac{d^2y}{dx^2}$ if $2x^3 - 3y^2 = 7$.

sol: $6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0 \implies y' = \frac{x^2}{y} = x^2 y^{-1}$

$\therefore$ $y'' = \frac{d}{dx} y' = x^2(-y^{-2} y') + y^{-1} \cdot 2x$.

$\therefore$ $y'' = -x^2 y^{-2} \cdot (x^2 y^{-1}) + 2x y^{-1}$
$= -x^4/y^3 + \frac{2x}{y} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$

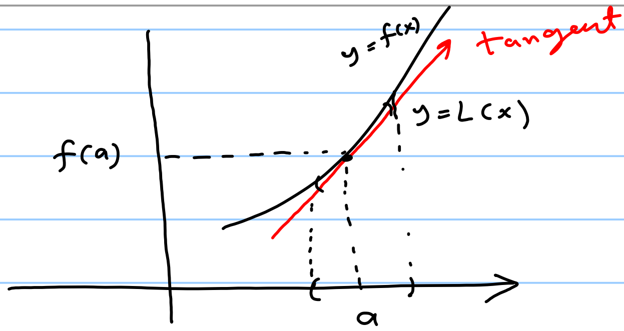
4) Find $\frac{dy}{dx}$ at $p(0,\pi)$ if $x^2\cos^2 y - \sin y = 0$

sol: $x^2 \cdot 2\cos y \cdot (-\sin y) \cdot y' + 2x\cos^2 y - \cos y \, y' = 0$

$\therefore$ $y' = \frac{-2x\cos^2 y}{-2x^2\cos y \sin y - \cos y} = \frac{2x\cos y}{2x^2\sin y - 1}$

$\therefore$ $y'|_p = \frac{0}{0-1} = \boxed{0}$.

3.9 Linearization and Differentials



يعتبر المماس $y = L(x)$ للدالة $y = f(x)$ عند النقطة a دالة تقريبية للدالة $y = f(x)$
عند قيم قريبة من a، وكلما اقتربت x من النقطة a كلما كان التقريب أفضل.

Def: If $f(x)$ is diff at $x = a$, then the approximation fun

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

is the Linearization of f at a.

The approximation $f(x) \simeq L(x)$ of f by L is called the standard linear approximation, and the point a is the center of the approximation.

Examples:

1) Find the Linearization of $f(x) = \sqrt{1 + x}$

a) at $a = 0$, and use this to estimate $\sqrt{1.2}$ and $\sqrt{1.05}$

sol: $f(0) = 1$, and $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

so the linearization

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = \boxed{1 + \frac{x}{2}}$$

Now, $f(x) \simeq L(x) \quad \forall\, x \simeq 0 \Longrightarrow$

$$\sqrt{x+1} \simeq 1 + \frac{x}{2} \quad \forall\, x \simeq 0$$

Now $\sqrt{1.2} = \sqrt{0.2 + 1} = f(0.2) \simeq L(0.2) \simeq 1 + \frac{0.2}{2} = 1.1$

(since $0.2 \simeq 0$) and

$\sqrt{1.05} = \sqrt{0.05 + 1} = f(0.05) \simeq L(0.05) \simeq 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$

(since $0.05 \simeq 0$).

Note that the true values of $\sqrt{1.2} = 1.0955$ and $\sqrt{1.05} = 1.0247$ which are closed to above values.

Remark We can't use the above approximation to estimate $\sqrt{4.2}$ since $\sqrt{4.2} = f(3.2)$ and $3.2 \not\simeq 0$ so $f(3.2) \not\simeq L(3.2)$

b) at $a = 3$ and estimate $\sqrt{4.2}$

Sol:

$$f(3) = 2 \quad \text{and} \quad f'(3) = \frac{1}{4} \quad \text{so}$$

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}.$$

so

$$f(x) \simeq L(x) \qquad \forall\, x \simeq 3.$$

$$\sqrt{4.2} = \sqrt{3.2+1} = f(3.2) \simeq L(3.2) = \frac{3.2}{4} + \frac{5}{4} = 2.05$$

The true value of $\sqrt{4.2} = 2.0494$.

2) Find the Linearization of $f(x) = \cos x$ at $x = \pi/2 \simeq 1.57$ then estimate $\cos(1.7)$.

Sol: $f(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$ and $f'(x) = -\sin x$ so

$$f'(\pi/2) = -1$$

$$\therefore L(x) = f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) = -x + \pi/2$$

$$\therefore \cos x \simeq \pi/2 - x \qquad \forall\, x \simeq \pi/2 = 1.57$$

Now

$$\cos(1.7) \simeq \pi/2 - 1.7 \simeq \boxed{-0.13}$$

Note that the true value of $\cos(1.7) = \boxed{-0.1288}$

3) Show that the Linearization of $f(x) = (1+x)^K$ at $a = 0$ is $L(x) = 1 + Kx$, then use this to find

an approximation of the fun $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>sol:</u> $f(0) = 1$ and $f'(x) = k(1+x)^{k-1} \implies$
$f'(0) = k$, so

$L(x) = 1 + k(x-0) = 1 + kx$.

$\implies$

$$(1+x)^k \simeq 1 + kx \quad \forall x \simeq 0 \quad \text{---- } (*)$$

Now,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \overset{(*)}{\simeq} 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-x^2)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} \qquad \forall x^2 \simeq 0 \quad \text{or equivalent } \forall x \simeq 0$$

لاحظ أن التقريب الأخير ليس خطي ، لكننا حصلنا عليه باستخدام التقريب الخطي

4) Find the linearization of $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ at $x = -4$, and use it to approximate $f(-4.5)$.

<u>sol:</u> $f'(x) = x / \sqrt{x^2+9} \implies f(-4) = 5,\ f'(-4) = \dfrac{-4}{5}$.

So $L(x) = 5 - \dfrac{4}{5}(x+4) = \dfrac{9}{5} - \dfrac{4}{5}x$.

Moreover, $L(x) \simeq f(x)$ for $x \simeq -4$.

$\therefore f'(-4.5) \simeq \dfrac{9}{5} - \dfrac{4}{5} * (-4.5) = \boxed{5.408}$

End of Chapter 3

Ch4 Applications of Derivatives

4.1 Extreme Values of Functions

DEFINITIONS Let f be a function with domain D. Then f has an **absolute maximum** value on D at a point c if

$$f(x) \le f(c) \qquad \text{for all } x \text{ in } D$$

and an **absolute minimum** value on D at c if

$$f(x) \ge f(c) \qquad \text{for all } x \text{ in } D.$$

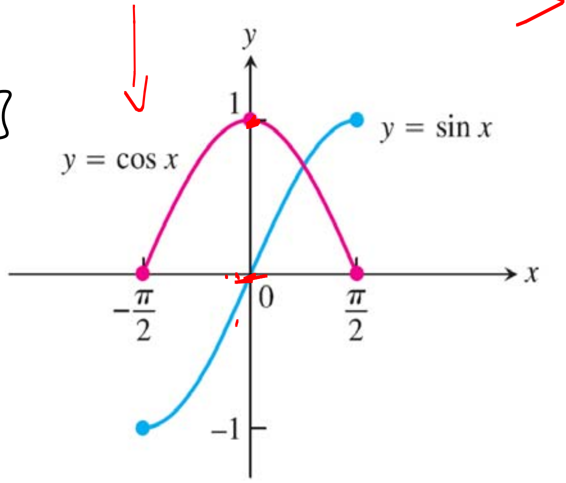
We say f has abs. extrema at $x = c$ if it has abs. max or abs. min.

Illustration:

a) The fun $y = \sin x$ on $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ has:

abs max of 1 at $x = \frac{\pi}{2}$ and

abs. min of -1 at $x = -\frac{\pi}{2}$.



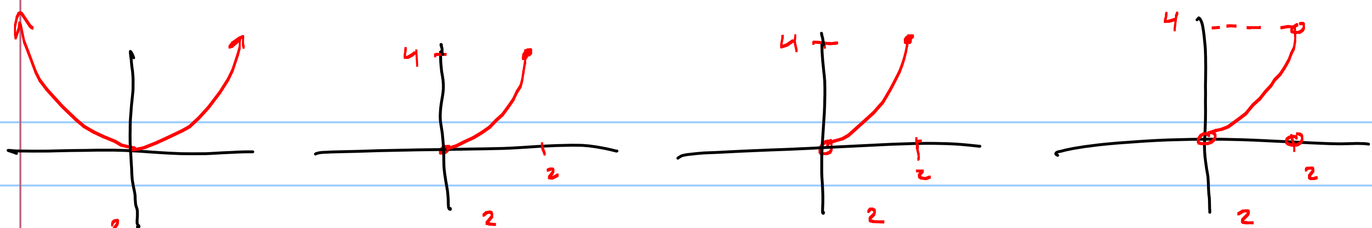
b) The fun $y = \cos x$ on $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ has:

abs. max of 1 at $x = 0$ and

abs. min of 0 at $x = \mp \frac{\pi}{2}$.

EXAMPLE 1 The absolute extrema of the following functions on their domains can be seen in Figure 4.2. Notice that a function might not have a maximum or minimum if the domain is unbounded or fails to contain an endpoint.

Function rule	Domain D	Absolute extrema on D
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	No absolute maximum. Absolute minimum of 0 at $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	Absolute maximum of 4 at $x = 2$. Absolute minimum of 0 at $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	Absolute maximum of 4 at $x = 2$. No absolute minimum.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	No absolute extrema.



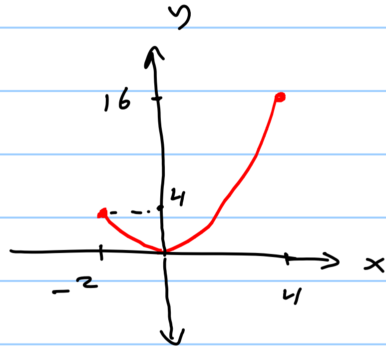
$y = x^2$ on $(-\infty, \infty)$ $\quad$ $y = x^2$ on $[0, 2]$ $\quad$ $y = x^2$ on $(0, 2]$ $\quad$ $y = x^2$ on $(0, 2)$

THEOREM 1—The Extreme Value Theorem If f is continuous on a closed interval $[a, b]$, then f attains both an absolute maximum value M and an absolute minimum value m in $[a, b]$. That is, there are numbers x_1 and x_2 in $[a, b]$ with $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, and $m \le f(x) \le M$ for every other x in $[a, b]$.

Illustration:

1) The fun $y = x^2$ is cont. on the closed interval $[-2, 4]$.

From graph:

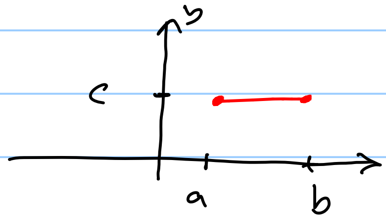


$m = 0$ is abs. min at $x_1 = 0$ and

$M = 16$ is abs. max at $x_2 = 4$.

2) $y = c$ (constant fun) is cont. on any closed interval $[a, b]$.

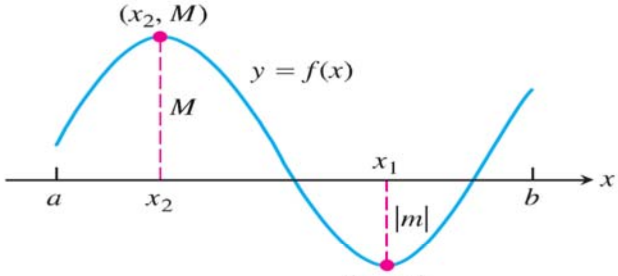
From graph



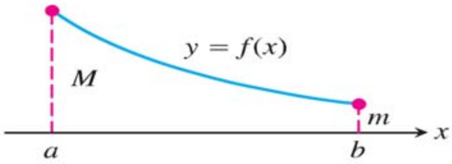
$m = M = c$ is both abs. max and abs min., and f takes them at any point x in $[a, b]$

رسومات توضيحية

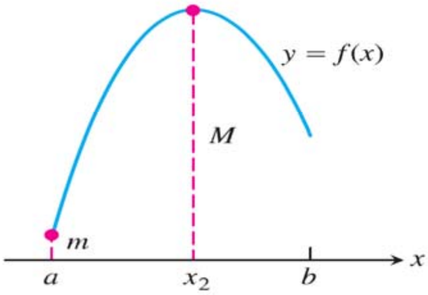
١- يمكن للدالة المتصلة على الفترة المغلقة أن تأخذ قيمها القصوى
المطلقة من أي مكان من الفترة / على الحدود ، و عند النقاط
الداخلية أو كلاهما كما توضح الرسومات التالية :



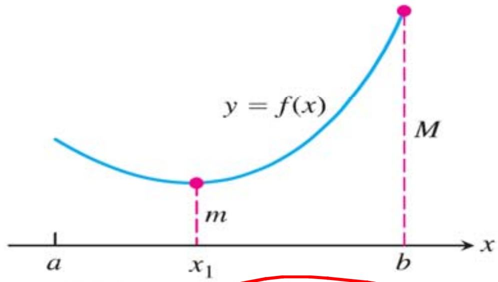
Maximum and minimum
at interior points



Maximum and minimum
at endpoints

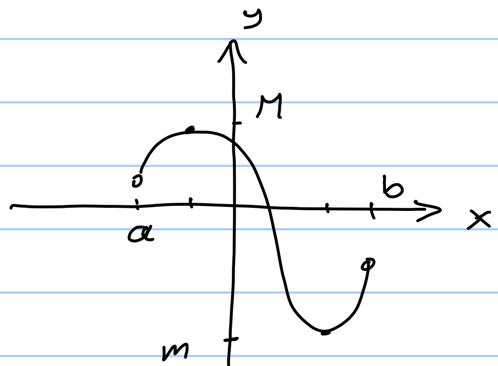


Maximum at interior point,
minimum at endpoint

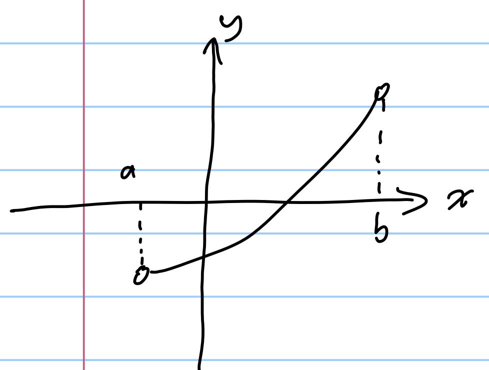


Minimum at interior point,
maximum at endpoint

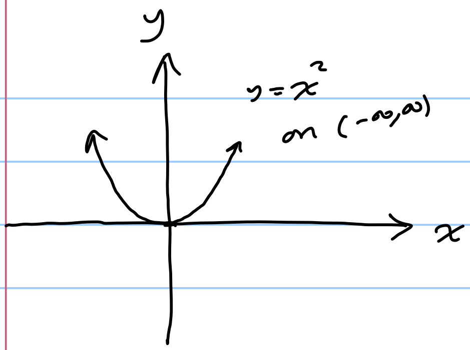
2- عندما لا يتحقق شرط النظرية بأن تكون الدالة متصلة لكن على فترة مفتوحة أو أن تكون الدالة غير متصلة ، فإنه لا نضمن أن يتحقق نتيجة النظرية ، فقد تكون هناك قيم مطلقة عظمى وصغرى وقد تكون واحدة موجودة والأخرى غير موجودة وقد لا تكون أي منها موجود (انظر الرسومات)



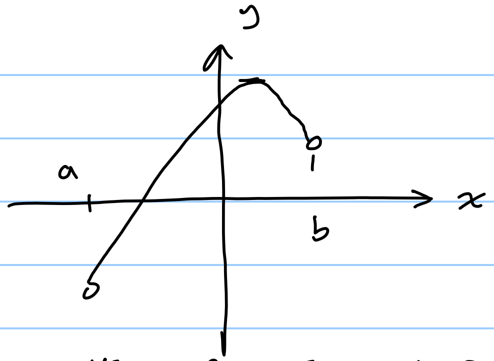
الدالة لا تحقق شرط النظرية
بالرغم من ذلك ، فإن للدالة قيم عظمى مطلقة
و صغرى مطلقة .



الدالة لا تحقق شرط النظرية
ليس للدالة قيم قصوى مطلقة .



الدالة لا تحقق شروط النظرية .
توجد قيمة صغرى مطلقة -
لا توجد قيمة عظمى مطلقة -



الدالة لا تحقق شروط النظرية .
توجد قيمة عظمى مطلقة -
لا توجد قيمة صغرى مطلقة -

Local (Relative) Extreme Values

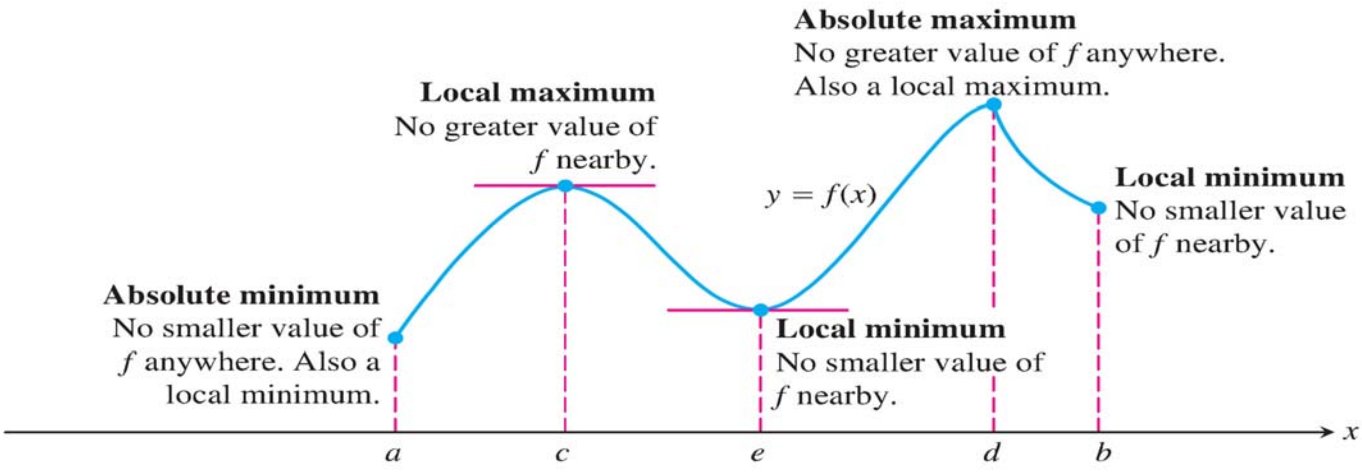
DEFINITIONS A function f has a **local maximum** value at a point c within its domain D if $f(x) \leq f(c)$ for all $x \in D$ lying in some open interval containing c.

A function f has a **local minimum** value at a point c within its domain D if $f(x) \geq f(c)$ for all $x \in D$ lying in some open interval containing c.

Remark

If the domain of f is the closed interval $[a, b]$, then f has a local maximum at the endpoint $x = a$, if $f(x) \leq f(a)$ for all x in some half-open interval $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Likewise, f has a local maximum at an interior point $x = c$ if $f(x) \leq f(c)$ for all x in some open interval $(c - \delta, c + \delta)$, $\delta > 0$, and a local maximum at the endpoint $x = b$ if $f(x) \leq f(b)$ for all x in some half-open interval $(b - \delta, b]$, $\delta > 0$.

Similar for local minimum.

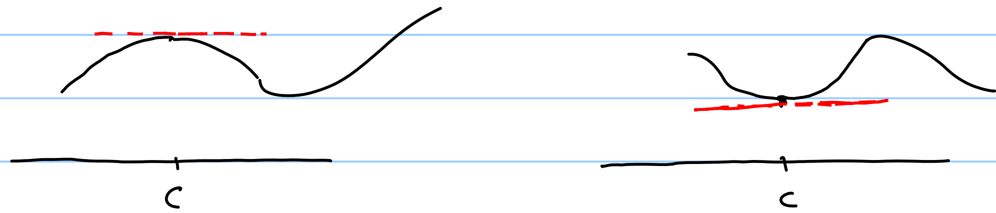


Remark: Any abs. extrema is local extrema
The converse is not always true.

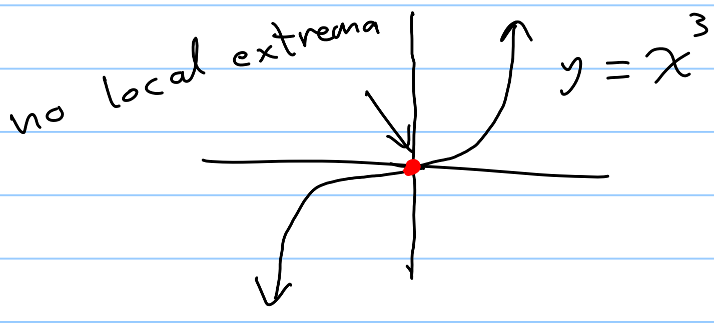
Finding Extrema

THEOREM 2—The First Derivative Theorem for Local Extreme Values If f has a local maximum or minimum value at an interior point c of its domain, and if f' is defined at c, then

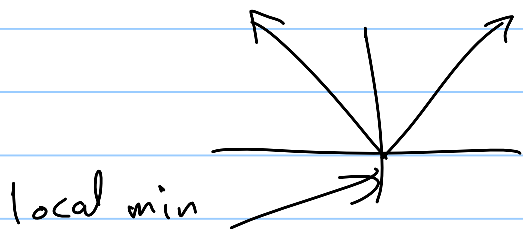
$$f'(c) = 0.$$



ملحوظات : ① عكس النظرية غير صحيح ، فإذا كانت $f'(c)=0$
فليس بالضرورة وجود قيمة قصوى محلية . مثال ذلك
$y = x^3$ عند $x=0$ فإن $f'(0)=0$



② إذا كانت f' غير موجودة فقد يكون هناك قيم قصوى محلية
مثال ذلك $y=|x|$ عند الصفر $f'(0)$ d.n.e.



ماذا نستفيد من النظرية ؟؟

عند البحث عن القيم القصوى المطلقة لدالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ / فإنه

نظرية 1 تؤكد وجود القيم القصوى المطلقة

نظرية 2 تؤكد أن مكان وجود القيم القصوى المطلقة عند

1- النقاط الداخلية حيث $f' = 0$

2- عند النقاط الداخلية حيث f' غير موجودة.

3- عند النقاط الحدية a, b

DEFINITION An interior point of the domain of a function f where f' is zero or undefined is a **critical point** of f.

وعليه / لإيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة متصلة على فترة مغلقة نتبع الخطوات التالية:

1) إيجاد النقاط الحرجة و النقاط الحدودية للفترة المغلقة

2) حساب قيم هذه النقاط / وأخذ أكبر القيم المحسوبة كقيمة عظمى مطلقة وأصغرها كقيمة صغرى مطلقة.

Examples: Find the abs. max and the abs. min of the following fun:

1) $f(x) = 8x - x^4$ on $[-2,1]$.

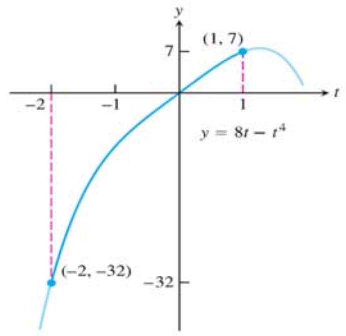
sol: The fun is cont. on $[-2,1]$ and

$f'(x) = 8 - 4x^3$, so $f' = 0$ at $x = \sqrt[3]{2} \notin [-2,1]$

so f has no critical points on $[-2,1]$.

Now Take $a = -2$, $b = 1$.

$f(-2) = -32$ and $f(1) = 7$, hence we have



that $M = 7$ is abs max. at $x = 1$
and $m = -32$ is abs min. at $x = -2$.

2) $f(x) = -3x^{2/3}$ on $[-2, 3]$

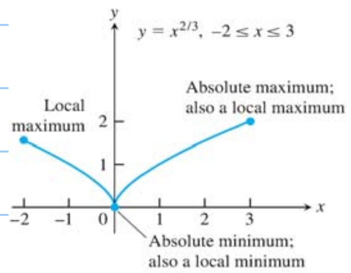
<u>sol:</u> $f(x)$ is cont. on $[-2,3]$, so

$$f'(x) = -2x^{-1/3} = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}}.$$

f' d.n.e. at $x = 0 \in (-2,3)$, so f has critical point at $x = 0$.

Now Take $a = -2$, $b = 3$ at $c_0 = 0$ and consider
$f(-2) = -4.76$, $f(3) = -6.24$, and $f(0) = 0$.

Threfore $M = 0$ is abs. max. at $x = 0$ and
$m = -6.24$ is abs. min at $x = 3$.



3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ on $[-2, 1]$.

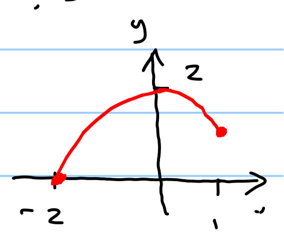
<u>sol:</u> f is cont. on the closed interval $[-2,1]$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f' = 0$ at $x = 0 \in [-2,1]$ and
f' d.n.e. at $x = \mp 2 \notin (-2,1)$

لاحظ أنه رغم أن 2- في المجال إلا أنها ليست نقطة داخلية وبالتالي لا تسمى نقطة حرجة.

so f has a critical point at $x = 0$.
Take $a = -2$, $b = 1$, and $c_0 = 0$.
$f(-2) = 0$, $f(1) = \sqrt{3}$ and $f(0) = 2$.

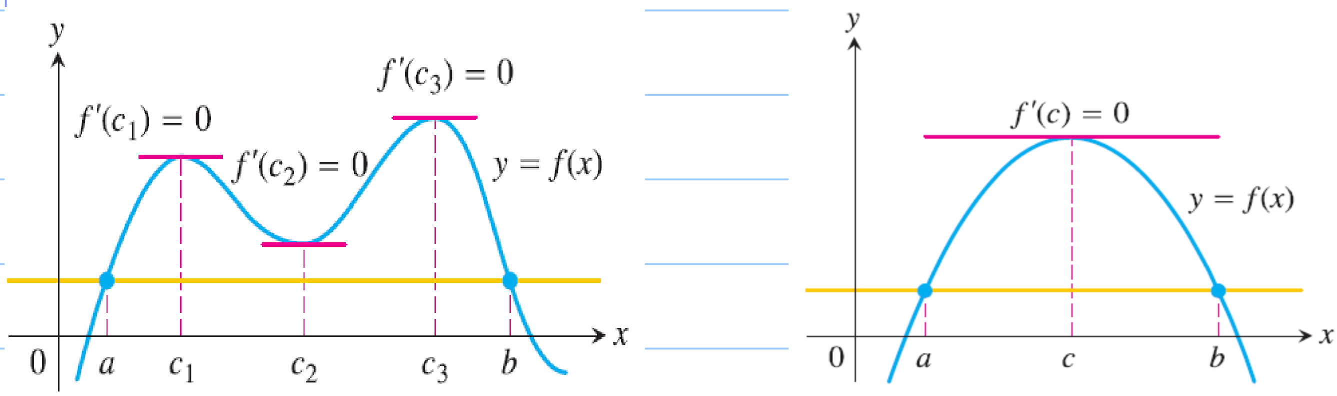


so $M = 2$ is abs. max at $x = 0$ and
$m = 0$ is abs. min at $x = -2$.

4.2 The Mean Value Theorem

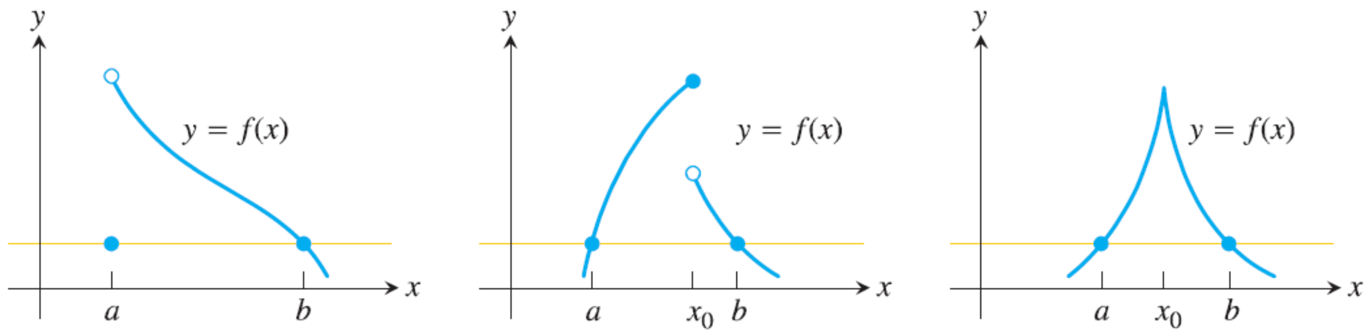
Note Title ٣١/٠٢/٠٩

Rolle's Thrm



THEOREM 3—Rolle's Theorem Suppose that $y = f(x)$ is continuous at every point of the closed interval $[a, b]$ and differentiable at every point of its interior (a, b). If $f(a) = f(b)$, then there is at least one number c in (a, b) at which $f'(c) = 0$.

ملحوظة: إذا اختل شرط من شروط نظرية رول لـ فإنه نتيجة رول غير مضمونة التحقق.

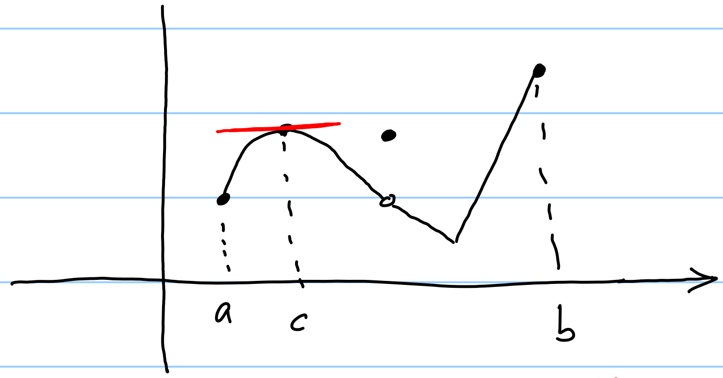


(a) Discontinuous at an endpoint of $[a, b]$

(b) Discontinuous at an interior point of $[a, b]$

(c) Continuous on $[a, b]$ but not differentiable at an interior point

في الحالات الثلاثة أحد شروط نظرية رول غير متحقق، وأيضاً نتيجة رول غير متحققة حيث لا توجد $c \in (a,b)$ حيث $f'(c) = 0$. بينما المثال القادم هو مثال لدالة لا تحقق أي من شروط نظرية رول ورغم ذلك فإنه نتيجة رول متحققة.



(جميع شروط نظرية رول غير متحققة ، رغم ذلك يوجد $c \in (a,b)$ حيث $f'(c) = 0$)

Illustration: Apply Rolle's Thrm on the fun

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x \quad \text{on} \quad [-3, 3].$$

Sol: $f(x)$ is cont. on $[-3, 3]$ and differentiable on $(-3, 3)$, and $f(-3) = 0 = f(3)$. So, by Rolle's Thrm, $\exists\, c \in (-3, 3)$ s.t. $f'(c) = 0$.

(لاحظ هنا أن نظرية رول قد انتهت وما بعد ذلك هو التحقق من الصحة)

للتأكد

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 3 = x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{at} \quad x = \mp\sqrt{3} \in (-3, 3).$$

Take $c_1 = \sqrt{3}$ and $c_2 = -\sqrt{3}$. So $f'(c_1) = 0 = f'(c_2)$

(لاحظ أن نظرية رول تضمن وجود نقطة واحدة على الأقل) ولكن قد يكون هناك أكثر من نقطة تحقق نتيجة النظرية) .

Example: Show that the equation

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

has exactly one real solution.

Sol: Let $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Since $f(-1) = -3$ and $f(0) = 1$; that is $f(-1) * f(0) < 0$, then by IVT $\exists\, c \in (-1, 0)$ s.t. $f(c) = 0$.

Now, if $\exists$ another point $b \in (-1, 0)$ s.t. $f(b) = 0$ (Say $b < c$), then we have that $[b, c] \subseteq [-1, 0]$ and f is cont. on $[b, c]$, diff on (b, c). Moreover,

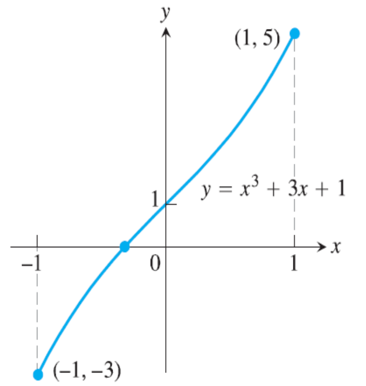
$$f(b) = f(c) = 0.$$

So, by Rolle's Thrm, $\exists\ r \in (b, c)$ s.t. $f'(r) = 0$.

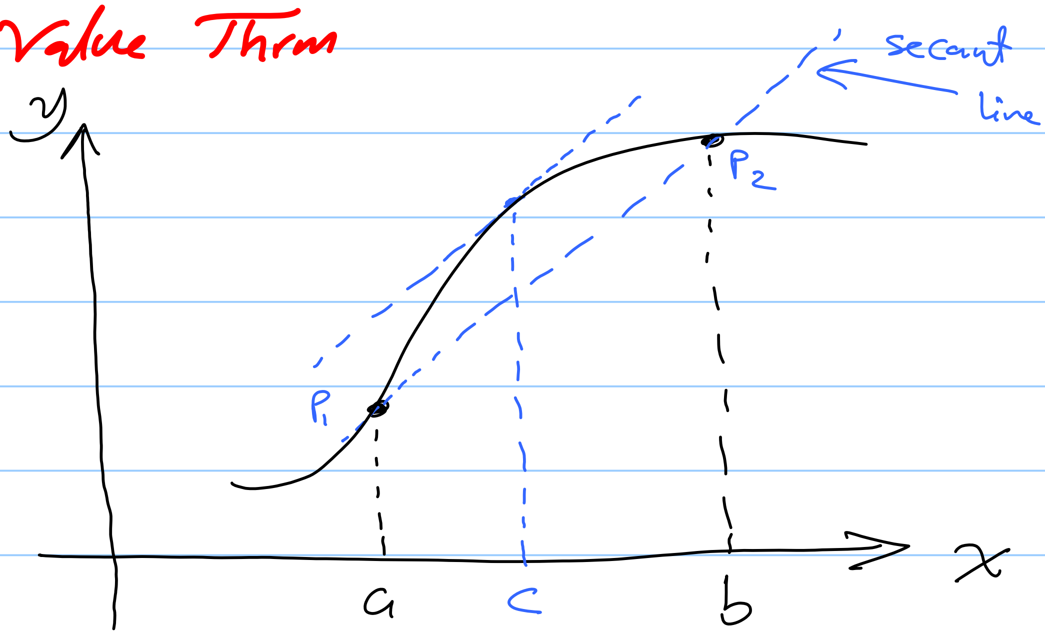
Consider $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 \quad \forall x$

so $f' \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 0]$ which is a contradiction. $\times$

So, there is only one point $c \in (-1, 0)$ s.t $f(c) = 0$ (الوحيدة)



The Mean Value Thrm



نلاحظ أن المماس عند النقطة c يوازي الخط القاطع الذي يمر بالنقطتين
P_1 , P_2 وبالتالي فإنه ميل المماس يساوي ميل الخط القاطع. نلاحظ أيضاً
أنه إذا تم تحريك الخط القاطع الذي يمر بالنقطتين على أنه محور x

فإن المماس الموازي له تمثيل مماس أفقي عند نقطة ما وهي النتيجة لنظرية رول / وعليه فإن برهان نظرية MVT العامة يتم من خلال نظرية رول.

THEOREM 4—The Mean Value Theorem Suppose $y = f(x)$ is continuous on a closed interval $[a, b]$ and differentiable on the interval's interior (a, b). Then there is at least one point c in (a, b) at which

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

البرهان غير مطلوب

PF: معادلة الخط المستقيم القاطع الذي يمر بالنقطتين $P_1(a, f(a))$ / $P_2(b, f(b))$ هو

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

نكون الدالة الجديدة

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Note that h is cont. on $[a, b]$.
diff on (a, b).

Moreover $h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - (f(a) + 0) = 0$

$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)\right) = 0$

So $h(a) = h(b)$. Thus, by Rolle's Thrm,
$\exists\ c \in (a, b)$ s.t. $h'(c) = 0 \Longrightarrow$
$f'(c) - g'(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = g'(c)$
$\Longrightarrow$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

ملحوظة: نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية MVT ، فإذا كانت $f(a) = f(b)$ بالإضافة لشروط نظرية MVT ، فإنه

باستخدام MVT ، توجد $c \in (a,b)$ بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 .$$

وهي نفس نتيجة رول باستخدام نظرية MVT .

Illustration: Apply the MVT on the fun

$$y = x^2 \quad \text{on} \quad [0, 2] .$$

Sol: f is cont. on $[0,2]$ and diff on $(0,2)$. So, by MVT, $\exists\ c \in (0,2)$ s.t.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = \underline{\underline{2}}$$

(هنا ينتهي دور النظرية باثبات انه هناك نقطة في الفترة $(0,2)$ ميل المماس عندها 2

وما يأتي بعد ذلك هو للتحقق من صحة النظرية)

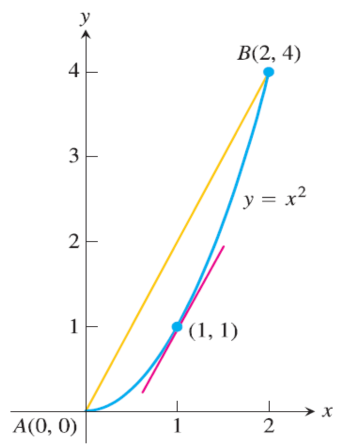
للتأكد

$$f'(x) = 2x = 2$$

at $x = 1$ Since $1 \in (0,2)$,

take $\underline{\underline{c = 1}}$, so

$$f'(1) = 2 = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$



Examples: 1) If $f(x)$ is cont. on $[a,b]$, diff on (a,b) and $f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Prove that $f(a) \neq f(b)$.

PF: Suppose to contrary that $f(a) = f(b)$. By MVT (or by Rolle's Thrm), $\exists\ c \in (a,b)$ s.t.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

which contradicts the given that $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.
So $f(a) \neq f(b)$.

2) Show that $\forall a,b \in \mathbb{R}$,

$$|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$$

PF: If $a=b$, then the inequality holds.
If $a \neq b$, say $a<b$, then define the fun.

$$f(x) = \sin x \text{ on } [a,b].$$

Clearly f is cont. on $[a,b]$ and diff on (a,b).
So, by MVT, $\exists \, c \in (a,b)$ such that

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Since $f(x) = \sin x$ and $f'(x) = \cos x$, we get

$$\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c.$$

$$\Longrightarrow \quad |\sin b - \sin a| = |b-a|\,|\cos c| \leq |b-a|$$

$$\left(\text{Since } |\cos c| \leq 1 \Rightarrow |b-a||\cos c| \leq |b-a|\right)$$

3) Find the values of a and b that make the fun

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & 0 \leq x < 1 \\ 4x+b & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

satisfies the hypotheses of the MVT.

Sol: f must be cont. on $[0,2]$. Clearly f is cont. on $[0,1)$ and on $(1,2]$ since f is poly on them.

at $x=1$ Consider $f(1) = 4+b = \lim_{x \to 1^+} 4x+b$.

and $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax^2 + 1 = a + 1$

f is cont. if $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, so

$$a + 1 = 4 + b \quad \text{- — - —} \quad (*).$$

f must be diff on $(0, 2)$. Clearly f is diff on $(0,1)$ and on $(1,2)$.

at $x = 1$: (في حال تحقق العلاقة $(*)$ وصحتها وكون الدالة في هذه الحالة متصلة / يمكن استخدام القوانين مباشرة من إيجاد المشتقة اليمنى واليسرى عند 1)

$$f'^{(+)}(1) = 4, \quad f'^{(-)}(1) = 2ax\Big|_{x=1} = 2a.$$

$f'(1)$ exists if $f'^{(+)}(1) = f'^{(-)}(1) \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

عوض في $(*)$ $\Rightarrow 4 + b = a + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

Therefore

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & 0 \le x < 1 \\ 4x - 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

COROLLARY 1 If $f'(x) = 0$ at each point x of an open interval (a, b), then $f(x) = C$ for all $x \in (a, b)$, where C is a constant.

البرهان غير مطلوب → PF: Let $x_1 \neq x_2$ in (a,b) where $x_1 < x_2$.

Since $f' = 0$ on (a,b), then we have that f is cont. on $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$ and diff on (x_1, x_2).

So by MVT, $\exists\, c \in (x_1, x_2) \subseteq (a,b)$ s.t.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \overset{\text{(given)}}{=} 0$$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$.
This proves that f is constant fun on (a, b).

COROLLARY 2 If $f'(x) = g'(x)$ at each point x in an open interval (a, b), then there exists a constant C such that $f(x) = g(x) + C$ for all $x \in (a, b)$. That is, $f - g$ is a constant function on (a, b).

البرهان غير مطلوب

PF: Define $h(x) = f(x) - g(x)$ on (a, b).
Then $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ (from the given).
By Corollary 1 above, $h(x) = C$ (constant) $\forall\, x \in (a,b)$. Thus, $f(x) = g(x) + C$. $\square$

Example: If you given that $f'(x) = \sin x$ and f passes through the point $p(0,2)$, find $f(x)$.

PF: Take $g(x) = -\cos x$. Since $g'(x) = \sin x = f'(x)$, by Corollary 2 above, $\exists\ C \in \mathbb{R}$ s.t.

$$f(x) = g(x) + C = -\cos x + C.$$

Since f passes through $P(0,2)$, then $f(0) = 2$

$$\Rightarrow \quad f(0) = -\cos 0 + C = -1 + C = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 3}$$

$$\therefore \quad \boxed{f(x) = -\cos x + 3}$$

(2) Find all possible funs with derivatives $y' = x^2$.

sol: Since the fun $g(x) = x^3/3$ has derivative $g' = x^2$, then any fun $f(x)$ satisfies $f' = x^2$ must have the form $f(x) = g(x) + C = \boxed{\frac{x^3}{3} + C}$

4.3 Monotonic Fun_s and the First Derivative Test

Note Title

٣١/٠٢/١١

Increasing Functions and Decreasing Functions

إن للنظرية MVT فوائد متعددة أخذنا بعضاً من النتائج في آخر
الفصل السابق 4.2 والتي يبنى عليها ما يعرف لاحقاً بالتكاملات المحددة.
من الفوائد الرياضية للنظرية MVT إمكانية تحديد فترات التزايد والتناقص
للدالة وهذا ما توضحه النتيجة التالية:

COROLLARY 3 Suppose that f is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b).

If $f'(x) > 0$ at each point $x \in (a, b)$, then f is increasing on $[a, b]$.

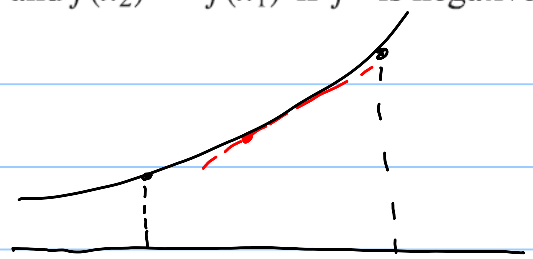
If $f'(x) < 0$ at each point $x \in (a, b)$, then f is decreasing on $[a, b]$.

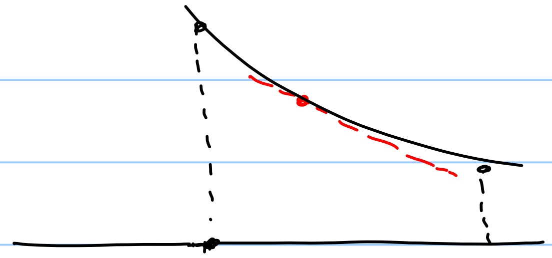
البرهان غير مطلوب

Proof Let x_1 and x_2 be any two points in $[a, b]$ with $x_1 < x_2$. The Mean Value Theorem applied to f on $[x_1, x_2]$ says that

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

for some c between x_1 and x_2. The sign of the right-hand side of this equation is the same as the sign of $f'(c)$ because $x_2 - x_1$ is positive. Therefore, $f(x_2) > f(x_1)$ if f' is positive on (a, b) and $f(x_2) < f(x_1)$ if f' is negative on (a, b). ■





(a) 1) f is $\nearrow$

2) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3) $(\nearrow)$ ميل المماس موجب

(b) 1) f is $\searrow$

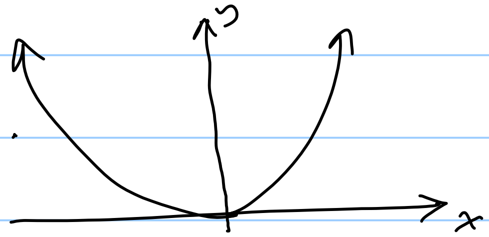
2) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3) $(\searrow)$ ميل المماس سالب

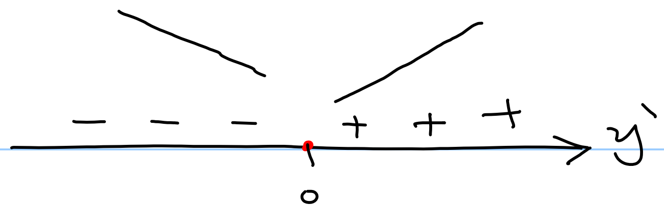
Illustration: $y = x^2$. From the graph

$f(x)$ is $\nearrow$ on $[0, \infty)$ and $\searrow$ on $(-\infty, 0]$.

From Thrm, $f'(x) = 2x$. (نقوم بإيجاد الإشارات)



$f'(x) = 0$ at $x = 0$



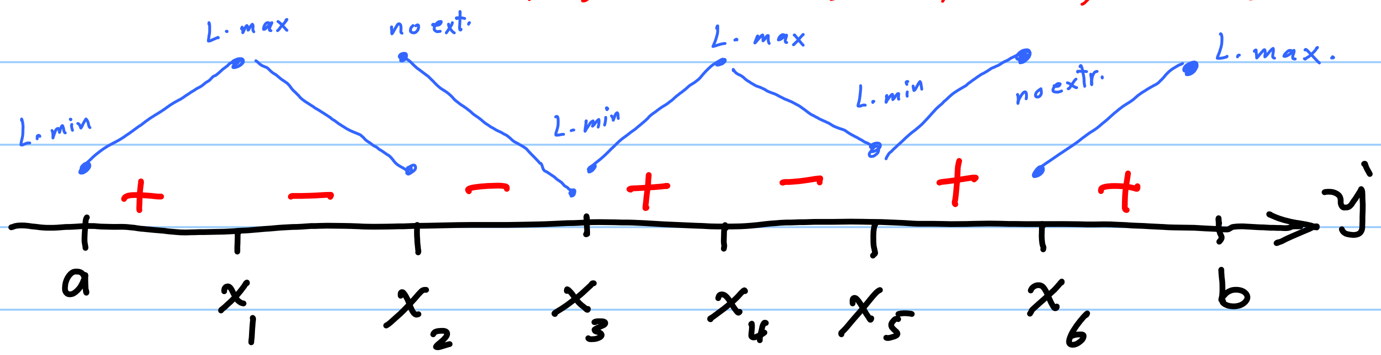
First Derivative Test for Local Extrema

First Derivative Test for Local Extrema

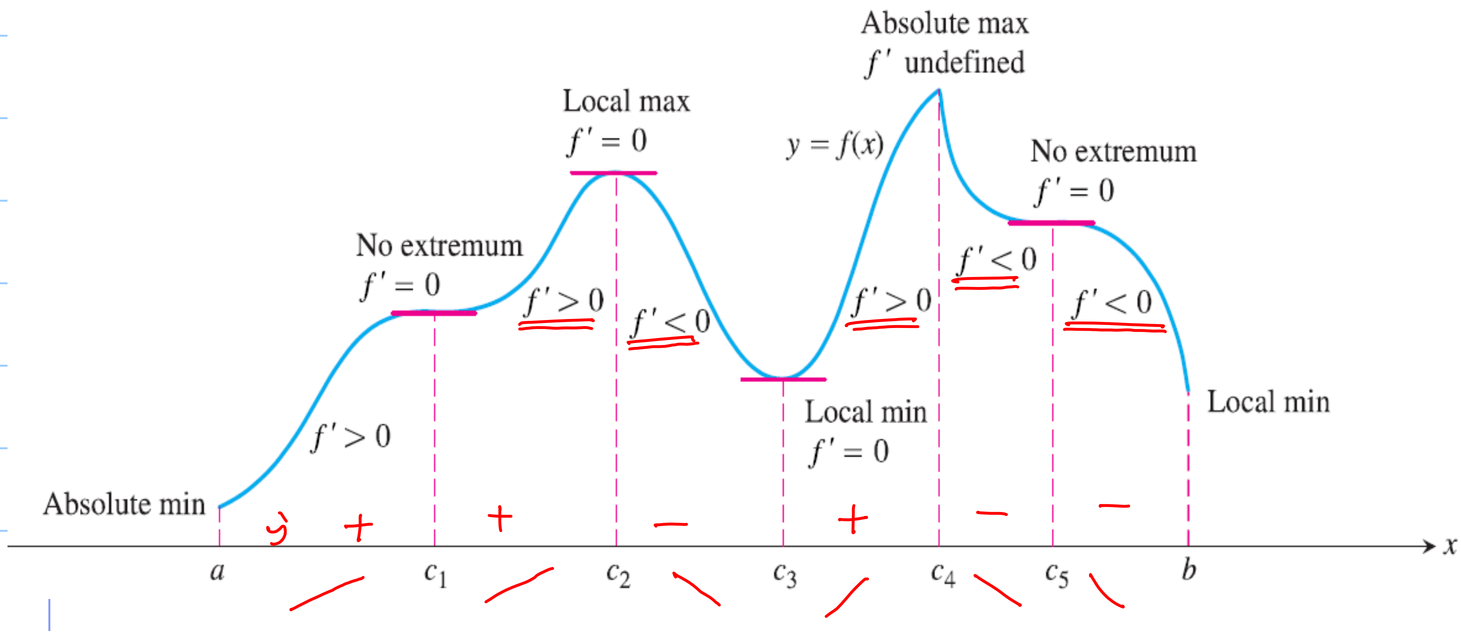
Suppose that c is a critical point of a continuous function f, and that f is differentiable at every point in some interval containing c except possibly at c itself. Moving across this interval from left to right,

1. if f' changes from negative to positive at c, then f has a local minimum at c;
2. if f' changes from positive to negative at c, then f has a local maximum at c;
3. if f' does not change sign at c (that is, f' is positive on both sides of c or negative on both sides), then f has no local extremum at c.

يمكن إجمال النظريتين السابقتين في التوضيح الهندسي التالي :



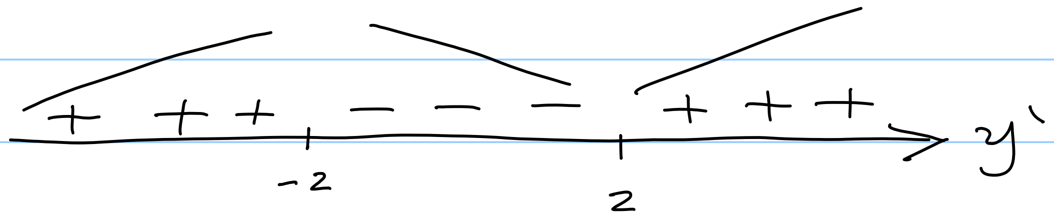
الرسمة التالية توضح كيف يكون شكل دالة ما نسبة إلى مشتقتها



Example: Find the critical points of $f(x) = x^3 - 12x - 5$ and identify the intervals on which f is $\nearrow$ and on which f is $\searrow$, then find local extrem values.

sol: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2) = 0$ at $x = \mp 2$.

$f(x)$ has critical points at $x = \mp 2$.



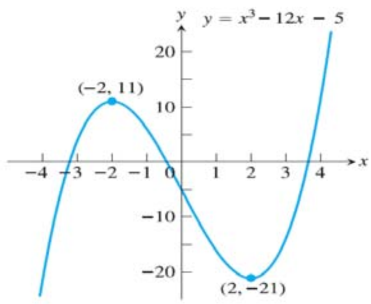
$f(x)$ is $\nearrow$ on $(-\infty, -2]$ and $[2, \infty)$,

$f(x)$ is $\searrow$ on $[-2, 2]$.

$f(-2) = 11$ and $f(2) = -21$, so

$M = 11$ is local max at $x = -2$.

$m = -21$ is local min at $x = 2$.



(انظر الرسمة)

(2) Find the critical points of $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 4)$ and identify the intervals on which f is $\nearrow$ and on which f is $\searrow$, then find local extrem

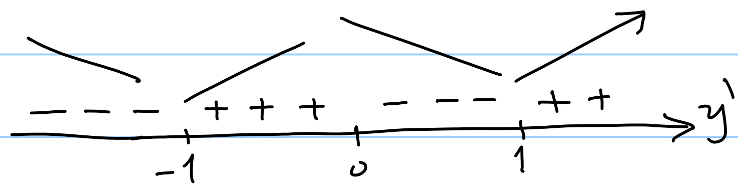
sol: $f(x) = x^{8/3} - 4x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{3}x^{5/3} - \frac{8}{3}x^{-1/3}$

$= \frac{8}{3}\left(\frac{x^2 - 1}{x^{1/3}}\right)$. $f' = 0$ at $x = \mp 1$ and f' d.n.e

at $x = 0$. So the critical points are $x = 0, 1, -1$.

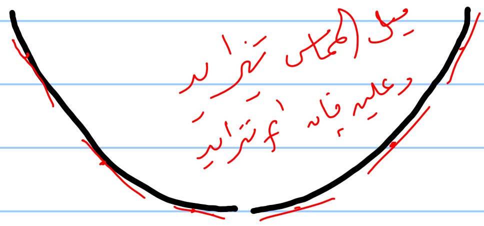
f is $\nearrow$ on $[-1, 0], [1, \infty)$.

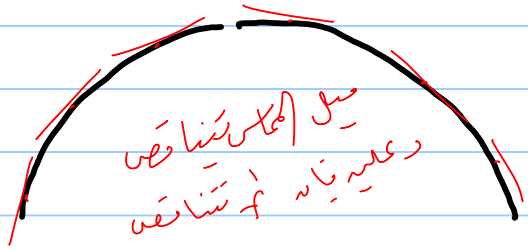
f is $\searrow$ on $(-\infty, -1], [0, 1]$.



$f(1) = -3$ is l. min., $f(-1) = -3$ is l. min, and $f(0) = 0$ is l. max.

4.4 Concavity and Curve Sketching





Concave up   concave down

DEFINITION The graph of a differentiable function $y = f(x)$ is

(a) **concave up** on an open interval I if f' is increasing on I;

(b) **concave down** on an open interval I if f' is decreasing on I.

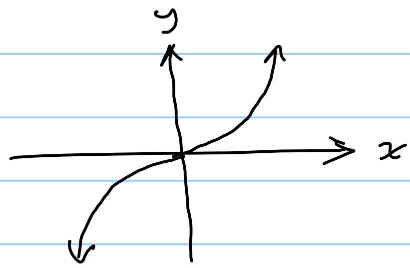
Thrm:

The Second Derivative Test for Concavity

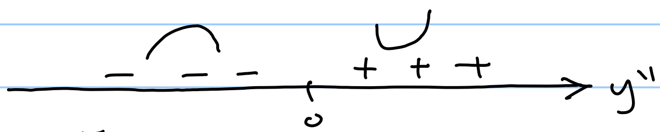
Let $y = f(x)$ be twice-differentiable on an interval I.

1. If $f'' > 0$ on I, the graph of f over I is concave up.
2. If $f'' < 0$ on I, the graph of f over I is concave down.

Illustration: 1) $y = x^3$ - from graph - is concave up on $[0,\infty)$ and concave down on $(-\infty,0]$.



Note that $f' = 3x^2$ and $f'' = 6x = 0$ at $x = 0$



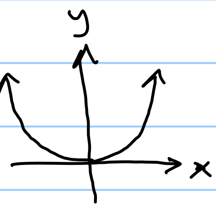
So using the above Thrm

y is concave $\begin{cases} \text{up} & \text{on } [0,\infty) \\ \text{down} & \text{on } (-\infty,0] \end{cases}$

تتوافق النظرية مع الملاحظة .

2) $y = x^2$ is concave up on $\mathbb{R}$.

Note that $y'' = 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

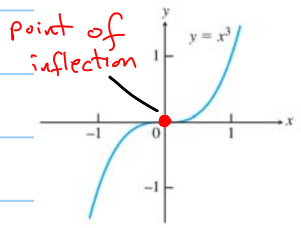


Point of Inflection

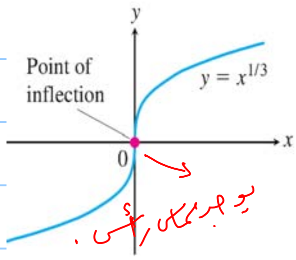
DEFINITION A point where the graph of a function has a tangent line and where the concavity changes is a **point of inflection**.

Illustration

1) $y = x^3$

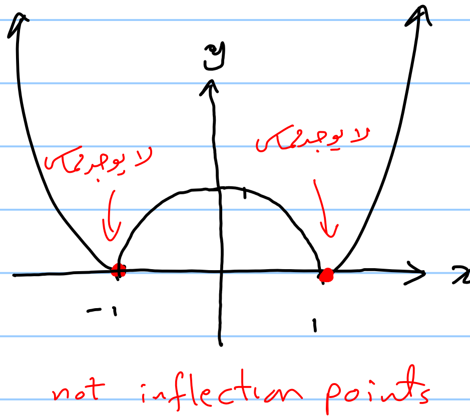


2) $y = \sqrt[3]{x}$

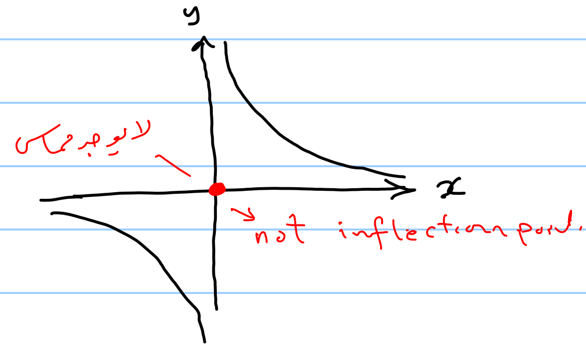


3) $y = |x^2 - 1|$

رغم تغير التحدب للدالة عند النقطتين ∓ 1
إلا أنه لا يوجد نقطتي انقلاب للدالة عندهما لعدم وجود مماس.



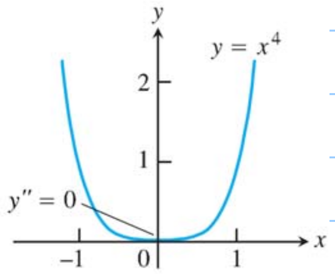
4) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Thrm At a point of inflection $(c, f(c))$, either $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ fails to exist.

ملحوظة: عكس النظرية غير صحيح / فإذا كانت $f''(c)=0$ أو $f''(c)$ غير موجودة / فإنه ليس بالضرورة أن يكون للدالة نقطة إنقلاب عند c.
أنظر المثال التالي.

Example: Consider the fun $f(x) = x^4$.



Although, $f''(0) = 0$, f has no inflection point at $x = 0$.

THEOREM 5—Second Derivative Test for Local Extrema Suppose f'' is continuous on an open interval that contains $x = c$.

1. If $f'(c) = 0$ and $f''(c) < 0$, then f has a local maximum at $x = c$.
2. If $f'(c) = 0$ and $f''(c) > 0$, then f has a local minimum at $x = c$.
3. If $f'(c) = 0$ and $f''(c) = 0$, then the test fails. The function f may have a local maximum, a local minimum, or neither.

ملحوظات: ١- لا تستطيع هذه النظرية تحديد القيم القصوى المحلية للنقاط الحرجة عندما f' غير موجوده ولا للنقاط الحدودية.
٢- تستخدم هذه النظرية لإيجاد القيم القصوى المحلية مباشرة دون الحاجة لإيجاد إشارات المشتقة الأولى.

Example: Find the local extreme values of the fun $y = x^4 - 4x^3 + 10$

Sol: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$y' = 0$ at $x = 0, 3$.

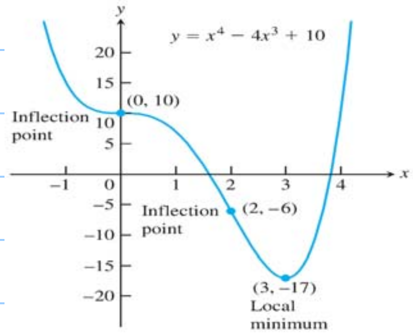
$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

$f''(0) = 0$ and $f''(3) = 36 > 0$

so there is no information at $x = 0$, while

the fun has local min at $x=3$ which is $f(3)=-17$

لاحظ من الرسمة أسفل أنه لا يوجد قيم قصوى محلية عند $x=0$.



Graph of funs

يفضل لرسم دالة ما $y=f(x)$ اتباع الخطوات التالية :

١- تحديد ما إذا كانت الدالة من الدوال المشهورة أو يمكن الحصول عليها من خلال دالة مشهورة باستخدام إزاحات أو انعكاسات / أو غيرها .

٢- إذا كانت الدالة ليست من الدوال المشهورة أو إزاحاتها / نحدد مجال الدالة وإذا كان هناك تماثلات حول y أو نقطة الأصل من خلال فحص إذا كانت الدالة زوجية أو فردية .

٣- إيجاد المشتقة الأولى وكل ما يمكن الحصول عليه منها وهي :
أ- النقاط الحرجة / ب- فترات التزايد والتناقص / جـ- القيم القصوى المحلية .

٤- إيجاد المشتقة الثانية وكل ما يمكن الحصول عليه منها وهي :
أ- نقاط الانقلاب ب- فترات التحدب لأعلى ولأسفل .

٥- إيجاد خطوط التقارب - إن وجدت - وخصوصاً للدوال الكسرية .

٦- رسم مخطط عام للمنحنى يشتمل على كافة المعلومات التي حصلنا عليها بدون محاور مع إيجاد نقاط مساعدة (مثل النقط الحرجة - نقاط الانقلاب - مقاطع الدالة مع المحاور / وغيرها)

٧- وضع المخطط العام على المحاور من خلال النقاط المساعدة .

Examples: For the following funs,

- Identify where the extrema of f occur.
- Find the intervals on which f is increasing and the intervals on which f is decreasing.
- Find where the graph of f is concave up and where it is concave down.
- Sketch the general shape of the graph for f.
- Plot some specific points, such as local maximum and minimum points, points of inflection, and intercepts. Then sketch the curve.

1) $y = x^4 - 4x^3 + 10$.

Sol: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$y' = 0$ at $x = 0, 3$

$f(0) = 10$ and $f(3) = -17$. So

$(0,10)$ and $(3,-17)$ are two critical points.

y': $- - -$ (0) $- - - -$ (3) $+ + + +$

f is $\begin{cases} \searrow & \text{on the interval } (-\infty, 3] \\ \nearrow & \text{on the interval } [3, \infty). \end{cases}$

f has local min. $m = -17$ at $x = 3$.

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.

$y'' = 0$ at $x = 0, 2$.

y'': $+ + +$ (0) $- - -$ (2) $+ + +$

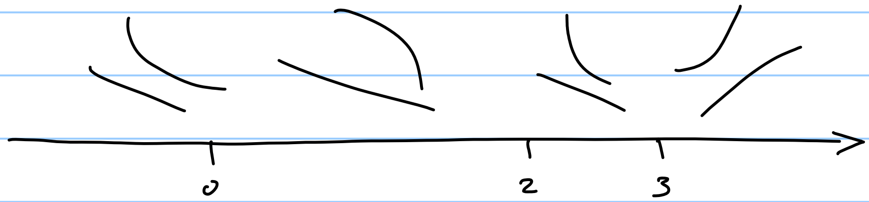
f is concave $\begin{cases} \cup & \text{on } (-\infty, 0], [2, \infty) \\ \cap & \text{on } [0, 2] \end{cases}$

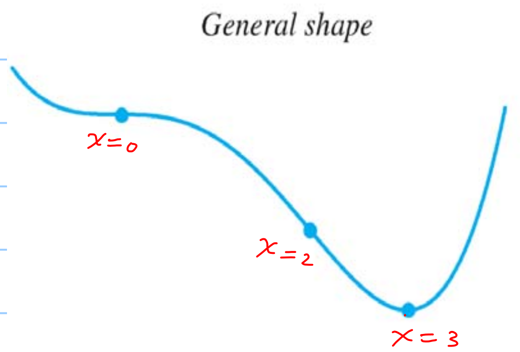
$f(0) = 10$ and $f(2) = -6$

لاحظ انه المشتقة الاولى عند 0 / 2 موجودة وبالتالي يوجد مماس للدالة وعليه

$(0,10)$ and $(2,-6)$ are two inflection points.

لعمل مخطط عام / نقوم بجمع البيانات السابقة كالتالي :

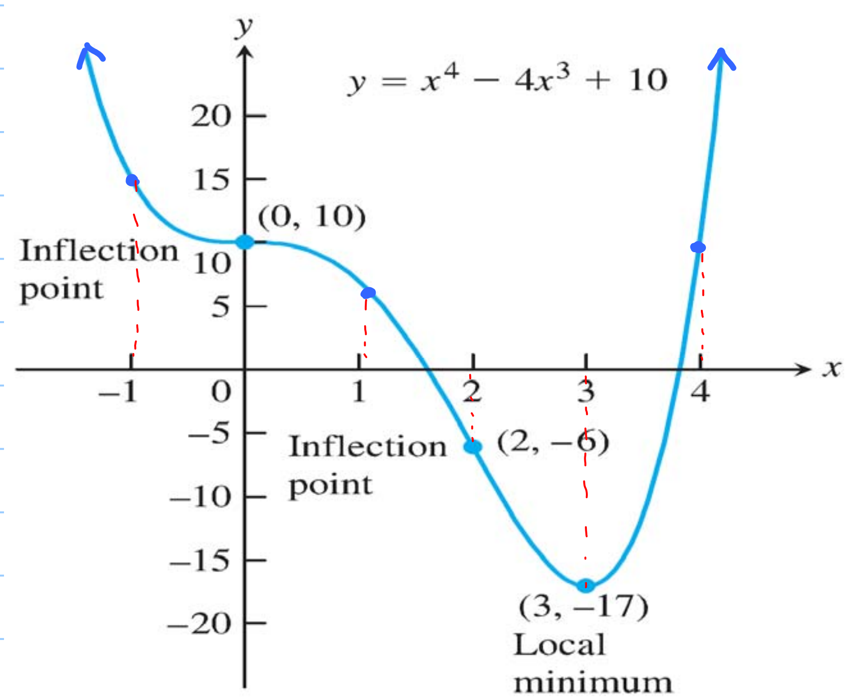




النقاط المهمة : $f(0)=10$, $f(2)=-6$, $f(3)=-17$

$f(1)=7$, $f(-1)=15$, $f(4)=10$

لاحظ أننا لا نستطيع إيجاد مقاطع الدالة مع محور x .



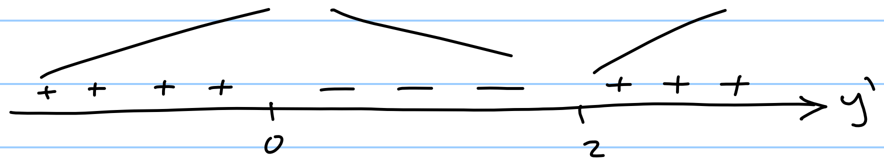
2) $y = x^{5/3} - 5x^{2/3} = x^{\frac{2}{3}}(x-5)$

Sol: $y' = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}\left(\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)$

so $y' = 0$ at $x = 2$ and y' d.n.e. at $x = 0$.

$f(0) = 0$ and $f(2) = -4.76$

so $(0,0)$ and $(2,-4.76)$ are two critical points

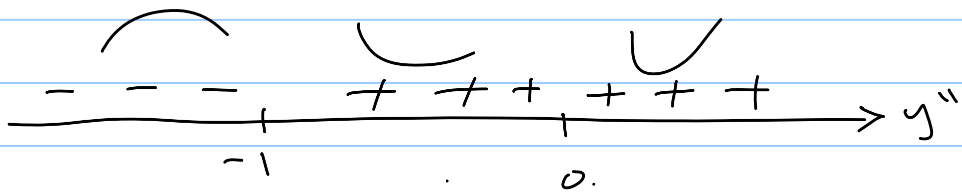


f is $\begin{cases} \nearrow & \text{on } (-\infty,0],\ [2,\infty) \\ \searrow & \text{on } [0,2] \end{cases}$

f has local max. $M=0$ at $x=0$ and local min. $m=-4.76$ at $x=2$.

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10}{9}\left(\frac{x+1}{x^{4/3}}\right).$$

$y''=0$ at $x=-1$ and y'' d.n.e. at $x=0$

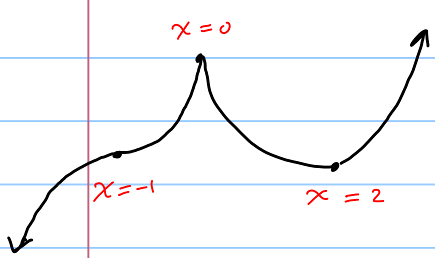


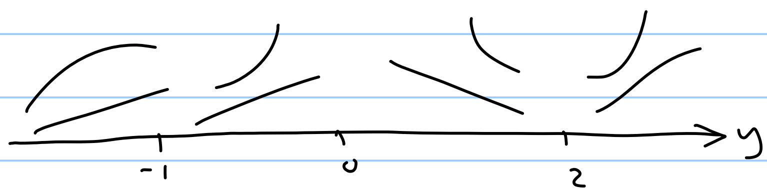
f is concave $\begin{cases} \cup & \text{on } [-1,\infty) \\ \cap & \text{on } (-\infty,-1] \end{cases}$

$f(-1) = -6$

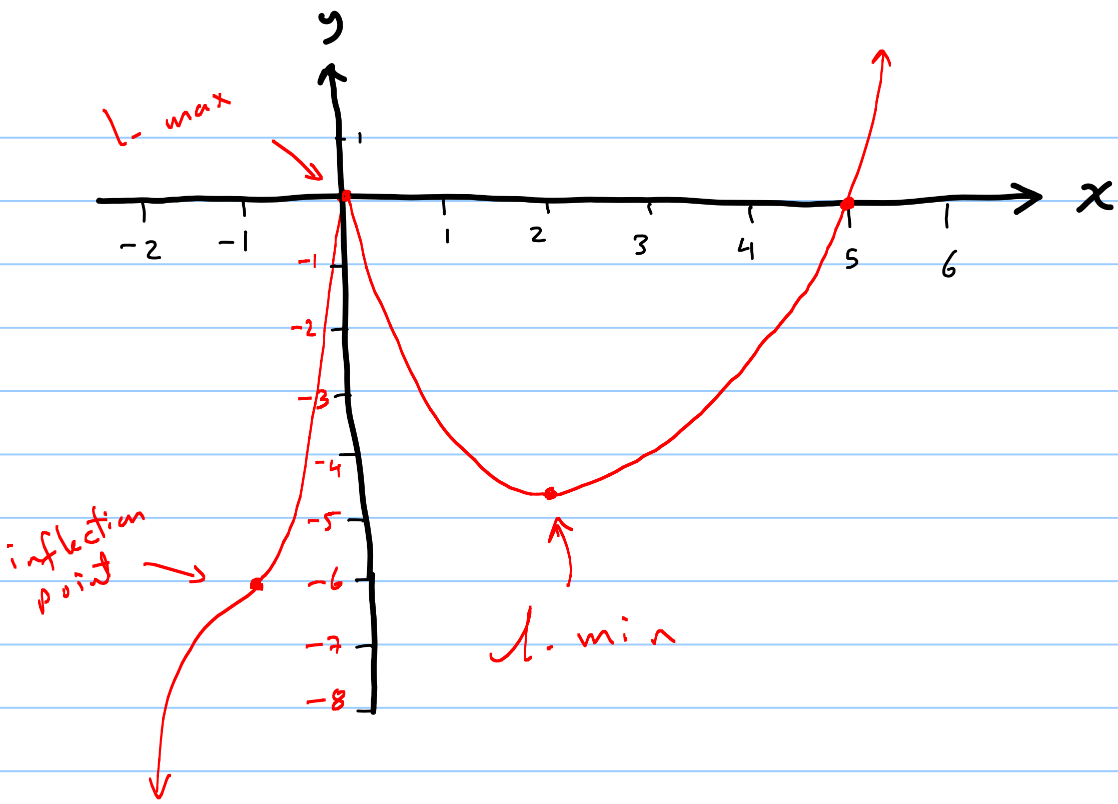
عند النقطة $x=-1$ يوجد للدالة مماس لأن $y'(-1)$ موجودة

so $(-1,-6)$ is inflection point.





$f(-1)=-6,\ f(0)=0,\ f(2)=-4.46$ $\quad f=0$ at $x=0, 5$



3) $y = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$, $x \neq 2$.

Sol: بداية ا في الدوال الكسرية نفضل البدء في إيجاد خطوط التقارب إن وجدت .

Using Long division, we have that

$$y = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right)$$

so $\boxed{y = \frac{x}{2} + 1}$ is oblique asymptote.

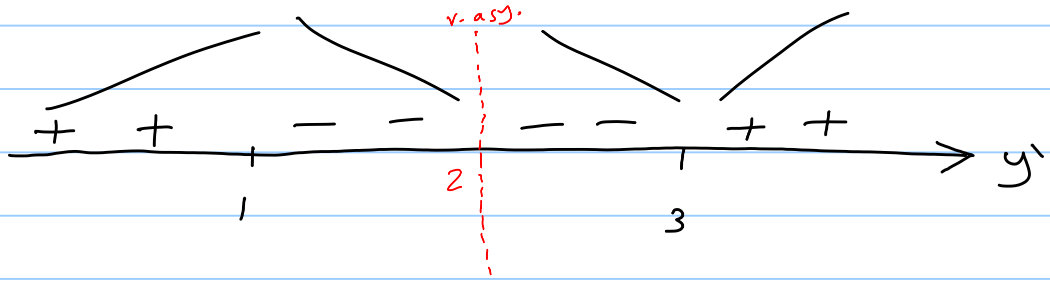
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x = 2} \text{ is 2-sided v. asymptote}$$

$$y' = \frac{(2x-4)\cdot 2x - (x^2 - 3)\cdot 2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2} .$$

$y' = 0$ at $x = 1, 3 \in D(f)$ and
y' d.n.e. at $x = 2 \notin D(f)$. Moreover,

$f(1)=1$ and $f(3)=3$, so
$(1,1)$ and $(3,3)$ are two critical points of f.

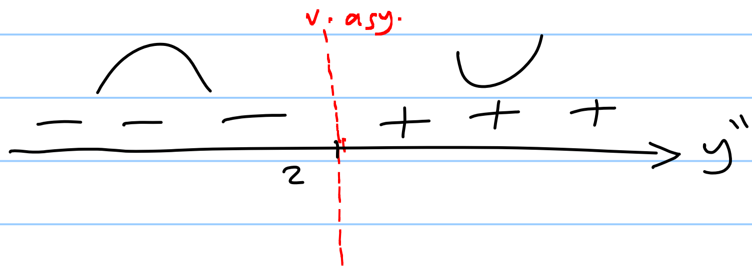


f is $\begin{cases} \nearrow & \text{on } (-\infty,1] \text{ and } [3,\infty) \\ \searrow & \text{on } [1,2) \text{ and } (2,3] \end{cases}$

f has local max $M=1$ at $x=1$ and
local min $m=3$ at $x=3$.

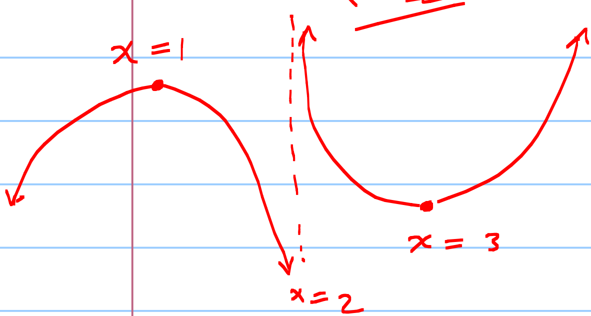
$$f'' = \frac{8}{(2x-4)^3}$$ (بعد الحسابات واختصارات)

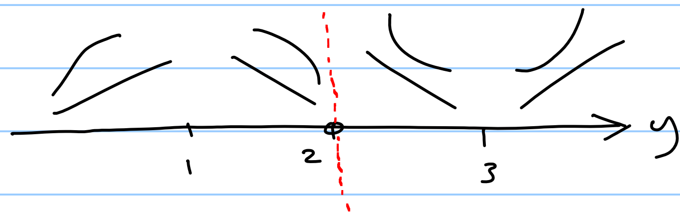
f'' d.n.e. at $x=2 \notin D(f)$.



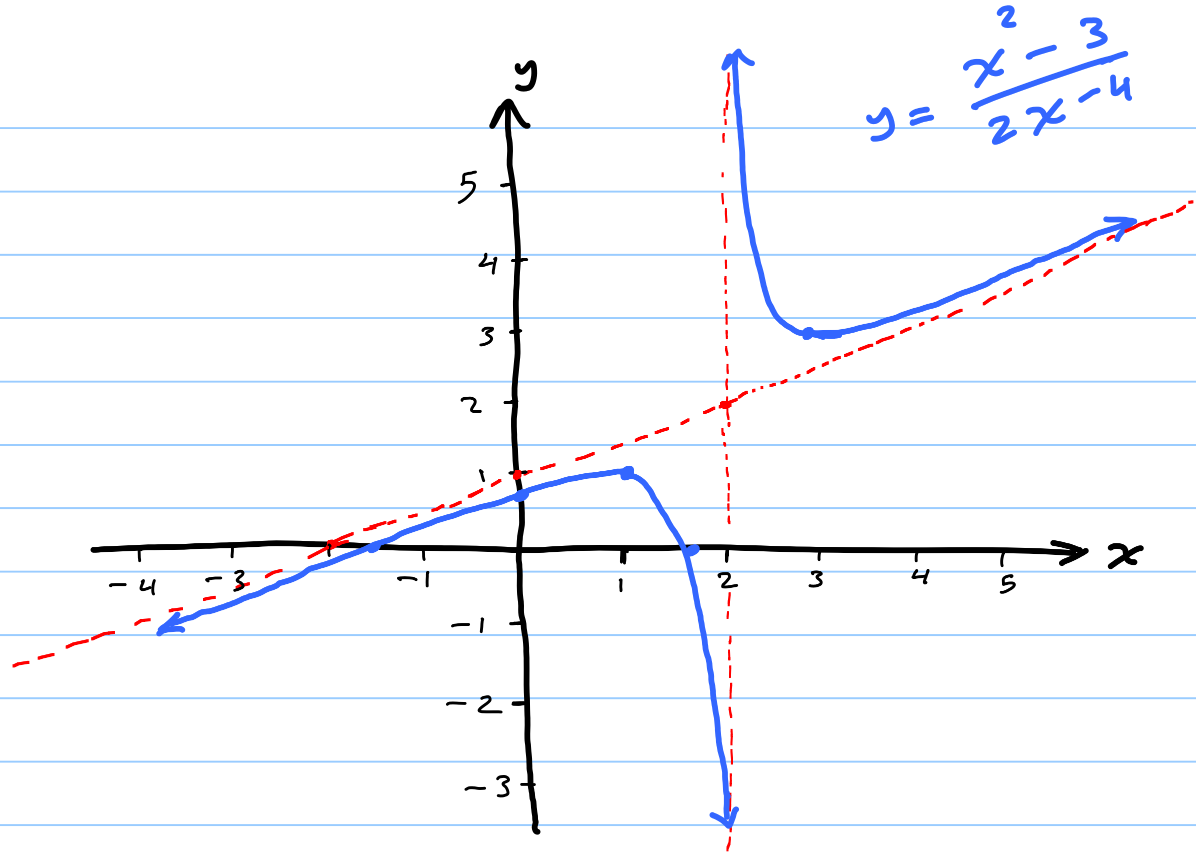
f is concave $\begin{cases} \cup & \text{on } (2,\infty) \\ \cap & \text{on } (-\infty,2) \end{cases}$

Clearly at $x=2$, $\nexists$ inf. point.





$f=0$ at $x=\mp\sqrt{3} \simeq 1.73$, $f(0)=\frac{3}{4}$.
$f(1)=1$, $f(3)=3$,



4) $y = \frac{x^2-1}{x^3}$. $x \neq 0$

Sol: $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0 \implies \boxed{y=0}$ is 2-sided h.a.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = -\infty$ and $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-1}{x^3} = \infty$, so

$\boxed{x=0}$ is 2-sided v.a.

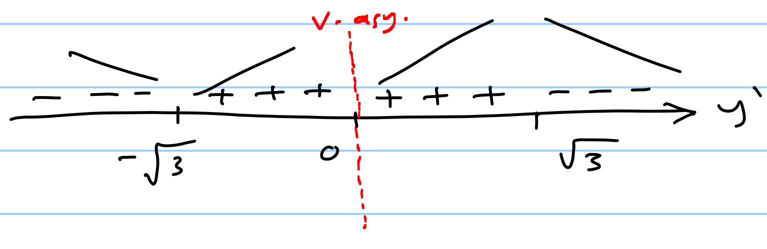
$$y' = \frac{x^3 \cdot 2x - 3x^2(x^2-1)}{x^6} = \frac{3-x^2}{x^4}$$

$y' = 0$ at $x = \mp\sqrt{3} \simeq \mp 1.73 \in D(f)$

y' d.n.e at $x = 0 \notin D(f)$.

$f(\sqrt{3}) = 0.4$, $f(-\sqrt{3}) = -0.4$.

so $(\sqrt{3}, 0.4)$ and $(-\sqrt{3}, -0.4)$ are two critical points.



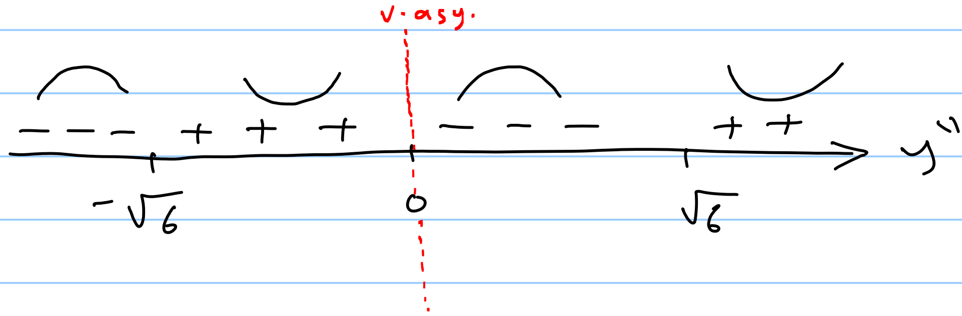
f is $\begin{cases} \searrow & \text{on } (-\infty, -\sqrt{3}], [\sqrt{3}, \infty). \\ \nearrow & \text{on } [-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3}). \end{cases}$

f has local max of 0.4 at $x = \sqrt{3}$ and
f has local min of -0.4 at $x = -\sqrt{3}$

$$f'' = \frac{2x^2 - 12}{x^5} = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5}$$

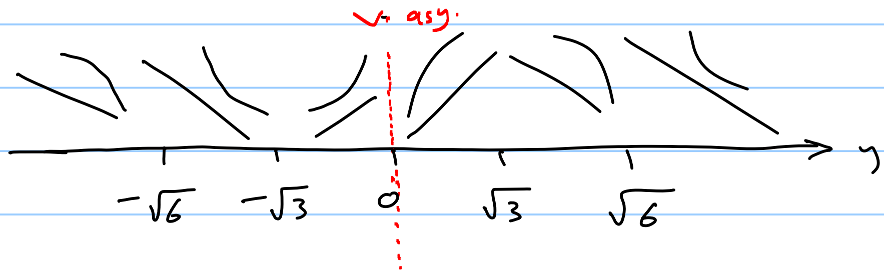
$f'' = 0$ at $x = \mp\sqrt{6} = \mp 2.45 \in D(f)$ and
f'' d.n.e. at $x = 0 \notin D(f)$.

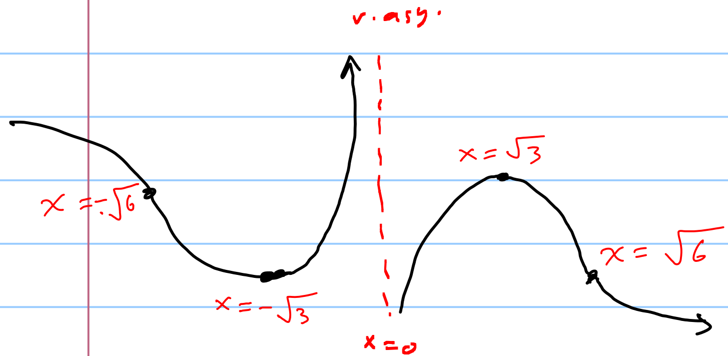
$f(\sqrt{6}) = 0.3$ and $f(-\sqrt{6}) = -0.3$



f is concave $\begin{cases} \cup & \text{on } [-\sqrt{6}, 0), [\sqrt{6}, \infty) \\ \cap & \text{on } (-\infty, -\sqrt{6}], (0, \sqrt{6}] \end{cases}$

The two points $(\sqrt{6}, 0.3)$, $(-\sqrt{6}, -0.3)$ are inf. points.



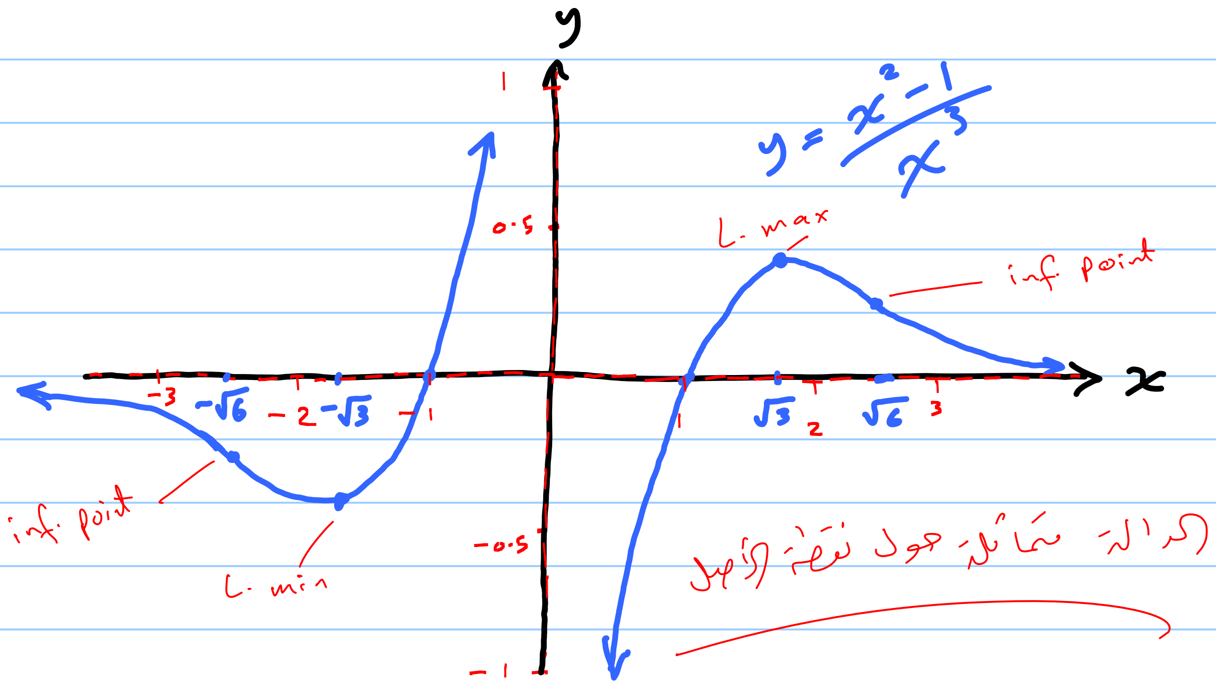


مخطط عام

النقاط المساعدة:

$f(-\sqrt{6}) = -0.3$, $f(-\sqrt{3}) = -0.4$, $f(\sqrt{3}) = 0.4$,
$f = 0$ at $x = \mp 1$

نلاحظ أن $f(-x) = -f(x)$ وبالتالي الدالة فردية ويوجد تماثل حول الأصل .



More Example (لحصة)

1) Read $\boxed{\text{Example 8}}$ in book page 208 .

2) Read $\boxed{\text{Example 9}}$ in book page 209

3) $y = x^{4/3} - 4x^{1/3} = x^{1/3}(x-4)$

sol: $f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3} - \frac{4}{3} x^{-2/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{x^{2/3}}\right)$

$f' = 0$ at $x = 1$, f' d.n.e. at $x = 0$.

$f(1) = -3$ and $f(0) = 0$ so

$(1,-3)$ and $(0,0)$ are two critical points.

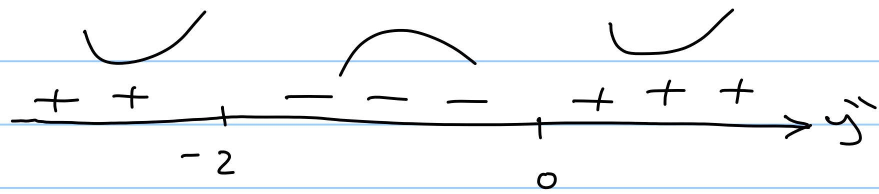
$$\begin{array}{ccccc} - - - & & - - - & & + + + \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array} \; y'$$

$$f \text{ is } \begin{cases} \nearrow & \text{on } [1,\infty) \\ \searrow & \text{on } (-\infty,1] \end{cases}$$

$m=-3$ is local min of f at $x=1$.

$$f'' = \frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right) \qquad \text{(after some algebra)}$$

$f''=0$ at $x=-2$ and f'' d.n.e. at $x=0$.



$$f \text{ is concave } \begin{cases} \cup & \text{on } (-\infty,-2]\ ,\ [0,\infty) \\ \cap & \text{on } [-2,0] \end{cases}$$

واضح أنه يوجد تغير للتحدب عند النقطتين 0 , -2 ، ولأنه $f'(-2)$ موجودة فإنه للدالة مماس عند $x=-2$ (كما في الأمثلة السابقة).

المشكلة عند $x=0$ لأنه $f'(0)$ غير موجود والمطلوب تحديد ما إذا كان هناك مماس للدالة أم لا؟

[للإجابة على السؤال: يوجد 4 احتمالات ١) عدم الإتصال (مرفوضة لأن الدالة متصلة)

٢) وجود زاوية (مرفوضة لأنه لا يوجد نقطة التحول).

٣) وجود حافة مدببة cusp (مرفوضة لأنه لا يتغير عندها التحدب /

وهنا يوجد تغير من التحدب)

٤) لا يبقى إلا احتمال واحد وهو وجود مماس عمودي]

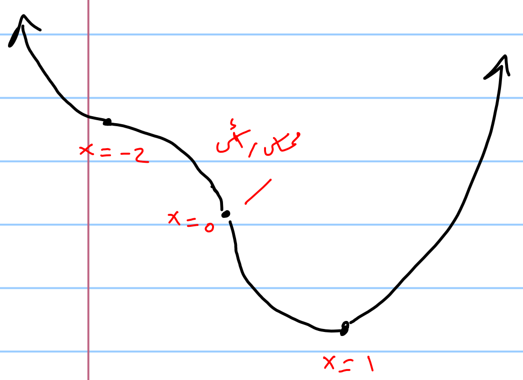
$f(-2) = 7.56 \implies$

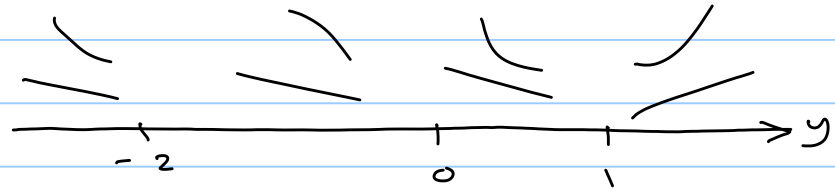
$(-2, 7.56)$ and $(0,0)$ are two inflection points.

ملحوظة = في مثل هذا السؤال عندما $f'(c)$ غير موجودة وتكون الدالة متصلة عند c وهناك تغير في التحدب بأن النقطة c تكون :

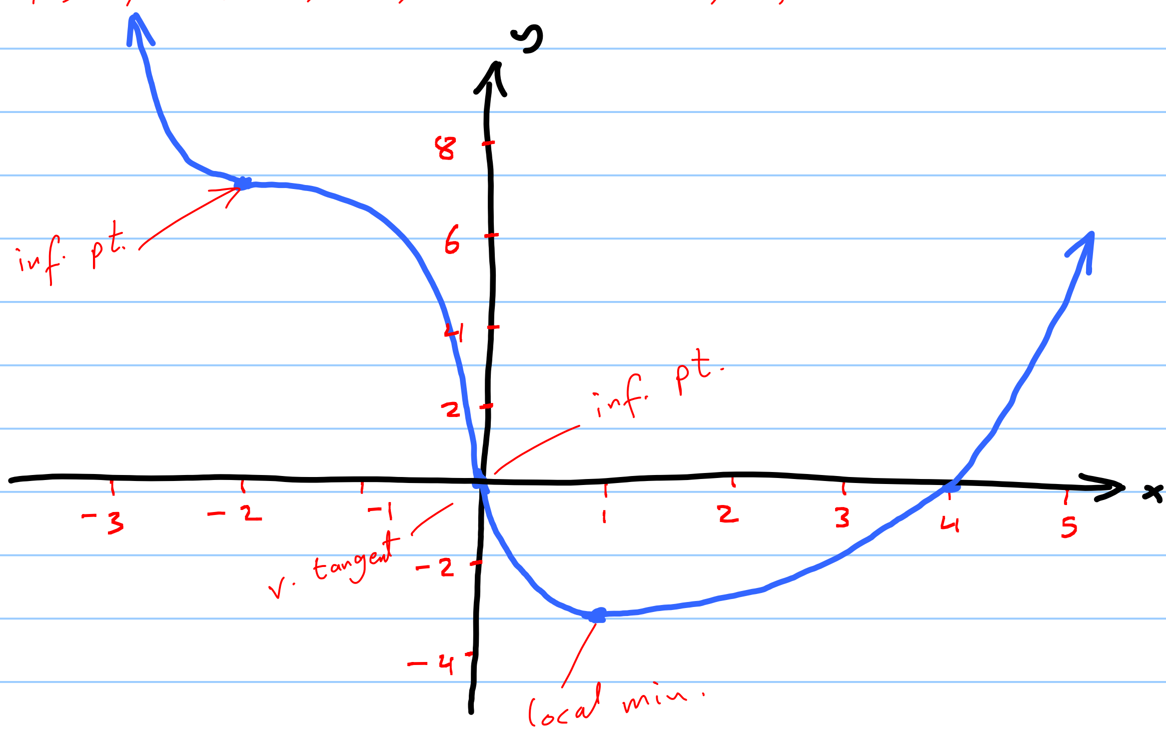
① نقطة انقلاب إذا لم تكن عند c تحول للقانون / كما تم توضيحه أعلاه

② ليست نقطة انقلاب إذا كانت الدالة ∕ نقطة التحول عند c .





$f(-2) = 7.56$, $f(0) = 0$, $f(1) = -3$, $f = 0$ at $x = 0, 4$

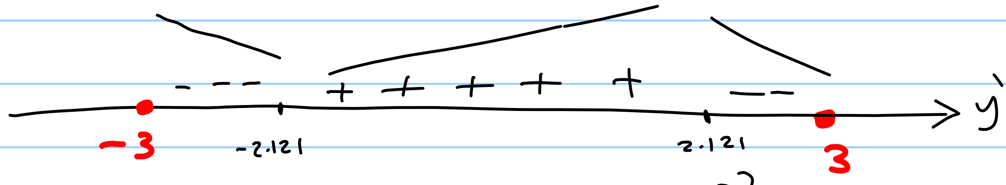


4) $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

Sol: Firstly, Note that the domain of this fun is $[-3, 3]$ and the fun is odd

$$f'(x) = x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}} + \sqrt{9-x^2} = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

$f' = 0$ at $x = \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \simeq \mp 2.121 \in (-3,3)$
and f' d.n.e. at $x = \mp 3 \notin (-3,3)$
f has critical points at $x = \mp 2.121$

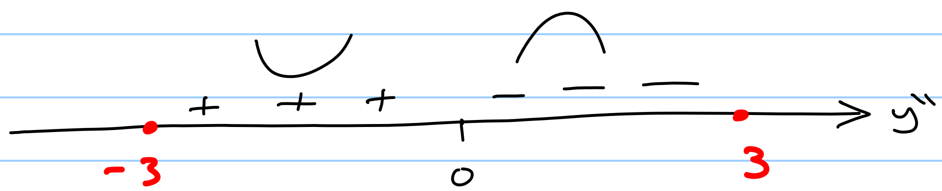


f is $\begin{cases} \searrow & \text{on } [-3,-2.121] , [2.121,3] \\ \nearrow & \text{on } [-2.121, 2.121] \end{cases}$

$f(-2.121) = -4.5$ and $f(2.121) = 4.5$. Moreover
$f(3) = f(-3) = 0$, so
$M_1 = 0$ is local max at $x = -3$, and $M_2 = 4.5$ is local max at $x = 2.121$.
$m_1 = -4.5$ is local min at $x = -2.121$ and $m_2 = 0$ is local min at $x = 3$.
(لاحظ أن لهذه الدالة نقاط حدودية)

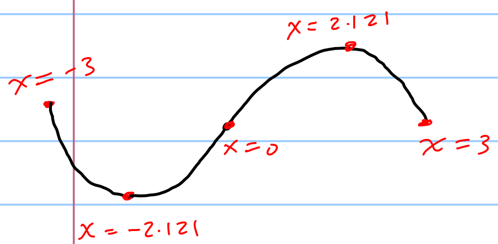
$$f'' = \frac{x(2x^2 - 27)}{(9 - x^2)^{3/2}}$$ (after some algebra)

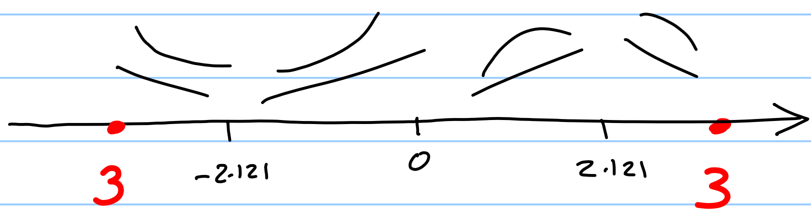
$f'' = 0$ at $x = 0 \in D(f)$ and at $x = \mp \sqrt{\frac{27}{2}} \simeq \mp 3.67 \notin D(f)$

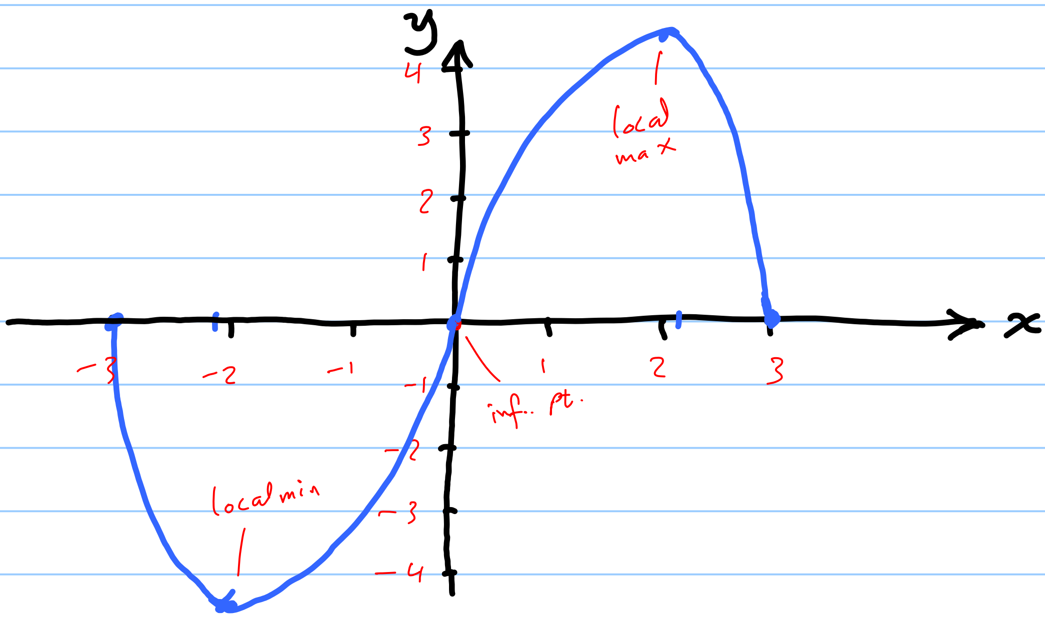


f is concave $\begin{cases} \cup & \text{on } [-3,0] \\ \cap & \text{on } [0,3] \end{cases}$

$f(0) = 0$, so $(0,0)$ is inflection point.
(لأنه يوجد مماس عند $x=0$ بسبب أن $f'(0)$ موجودة).







5) $y = |x^2 - 1|$

Sol: في البداية نحتاج لإعادة صياغة الدالة ، وبالتالي نحتاج لمعرفة إشارة x^2-1 كالتالي :

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{at} \quad x = \mp 1$$

$$\underset{-1}{\overset{+}{\longleftarrow}} \quad \overset{- \ -}{\quad} \quad \underset{1}{\overset{+}{\longrightarrow}} \quad x^2 - 1$$

$\therefore \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad$ on $\quad (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \quad$ and

$x^2 - 1 < 0 \quad$ on $\quad (-1, 1) \quad$ so

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \text{ or } x \geq 1 \\ 1 - x^2, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad y' = \begin{cases} 2x, & x < -1 \text{ or } x > 1 \\ -2x, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$y' = 0 \quad$ when $\quad 2x = 0 \quad$ or $\quad x = 0 \notin (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$y' = 0 \quad$ when $\quad -2x = 0 \quad$ or $\quad x = 0 \in (-1, 1) \quad \longleftarrow$

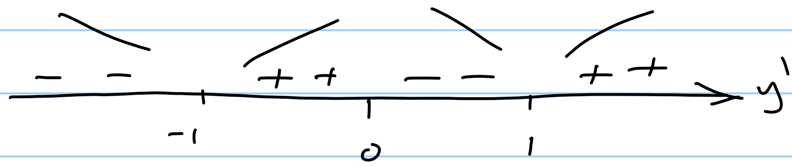
Note that $f'^{(+)}(-1) = 2$ and $f'^{(-)}(-1) = -2$,

$f'^{(+)}(1) = 2$ and $f'^{(-)}(1) = -2$

so $f'(1)$ and $f'(-1)$ d.n.e.

$f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 0$, so

$(0,1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ are critical points



$$f \text{ is } \begin{cases} \nearrow & \text{on } [-1,0],\ [1,\infty) \\ \searrow & \text{on } (-\infty,-1],\ [0,1]. \end{cases}$$

$m = 0$ is local min at $x = \mp 1$

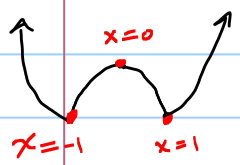
$M = 1$ is local max at $x = 0$.

$$y'' = \begin{cases} 2 , & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ -2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

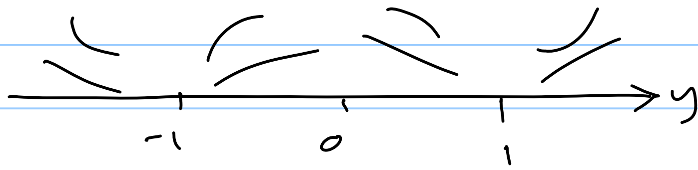
y'' d.n.e. at $x = \mp 2$

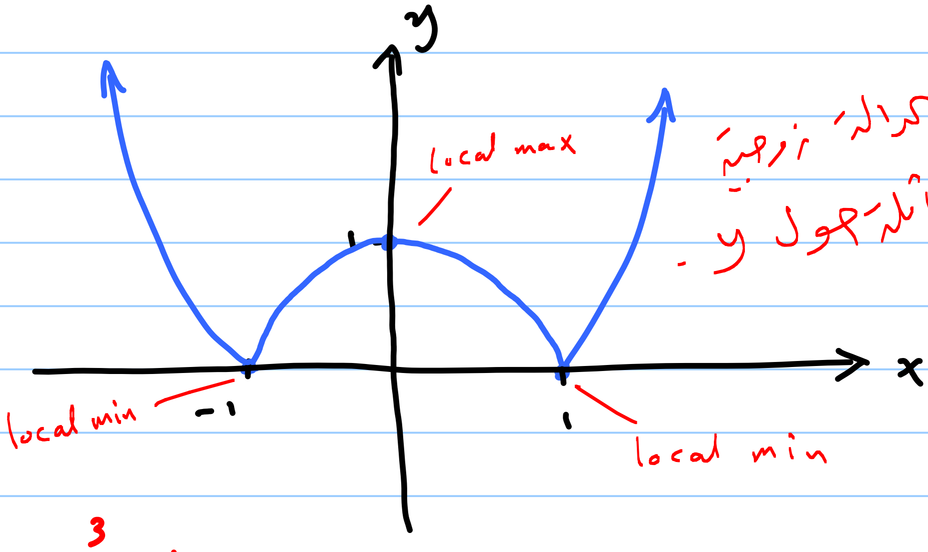
$$f \text{ is concave } \begin{cases} \cup & \text{on } (-\infty,-1],\ [1,\infty) \\ \cap & \text{on } [-1,1] \end{cases}$$

لاحظ أنه f' غير موجودة عند $x=\mp1$ لوجود زوايا (مشتقة يمنى لا تساوي مشتقة يسرى والدالة متصلة) . لذلك لا يوجد نقاط انقلاب عند $x=\mp1$



مخطط عام





لاحظ أن الدالة زوجية وبالتالي متماثلة حول y .

6) $y = \dfrac{x^3+1}{x}$, $x \neq 0$

Sol: $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

لاحظ أنه لا يوجد خط تقارب أفقي أو مائل / ولكن من خلال dominant terms
نجد أنه عندما $x \to \mp\infty$ فإن $f(x) \simeq x^2$ (عندما تكون |x| كبيرة تأخذ الدالة شكل x^2)

v. asym:

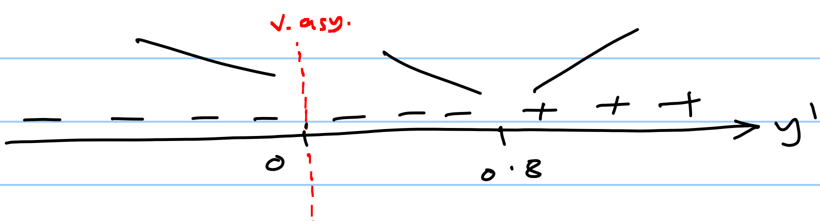
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3+1}{x} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3+1}{x} = -\infty \quad \Longrightarrow$$

$\boxed{x=0}$ is 2-sided v. asym.

$y' = \dfrac{2x^3-1}{x^2} \Longrightarrow y' = 0$ at $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0.8 \in D(f)$

y' d.n.e. at $x = 0 \notin D(f)$.

$f(0.8) = 1.9 \Longrightarrow (0.8, 1.9)$ is a critical point of f.

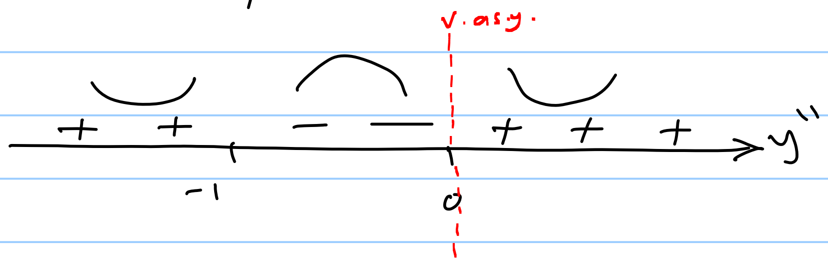


f is $\begin{cases} \searrow & \text{on } (-\infty, 0),\ (0, 0.8] \\ \nearrow & \text{on } [0.8, \infty). \end{cases}$

$m = 1.9$ is local min of f at $x = 0.8$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3} = 0 \quad \text{at} \quad x = -1 \in D(f)$$

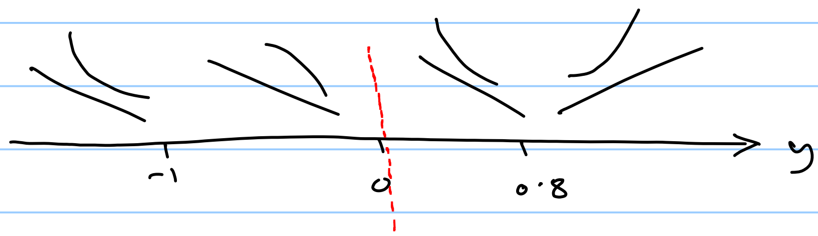
f'' d.n.e. at $x = 0 \notin D(f)$

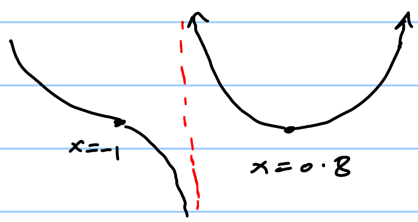


$f(-1) = 0$

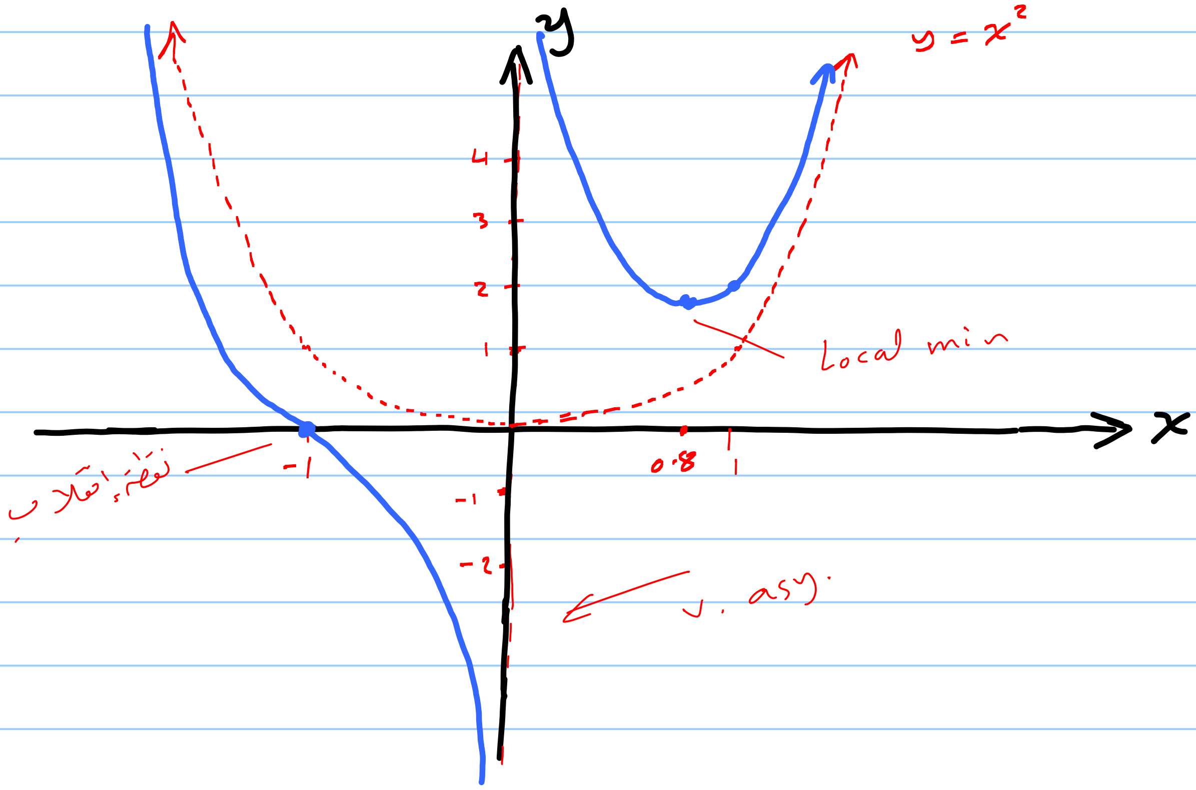
f is concave $\begin{cases} \cup & \text{on } (-\infty, -1],\ (0, \infty) \\ \cap & \text{on } [-1, 0) \end{cases}$

$(-1, 0)$ is inf. pt.



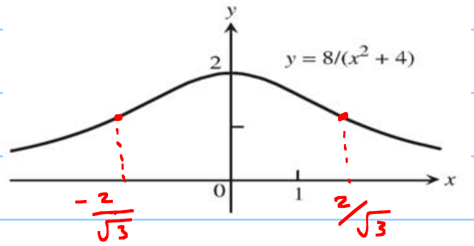


$f(-1) = 0$, $f(0.8) = 1.9$, $f(1) = 2$,



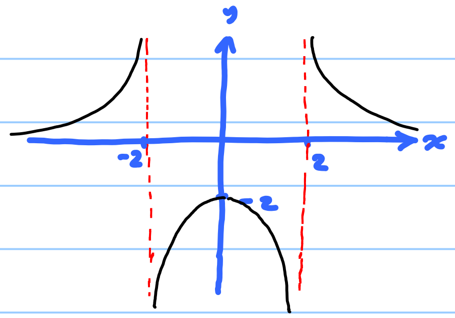
Exercises: Graph

1) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$



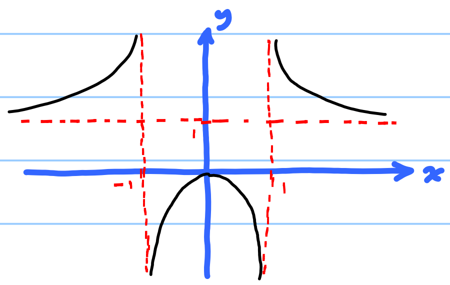
الجواب :

2) $y = \dfrac{8}{x^2-4}$



الجواب :

3) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$



الجواب :

Note Title ٢٣/٠١/١٠

Ch 5 Integration

5.1 Area and Estimating with Finit Sums

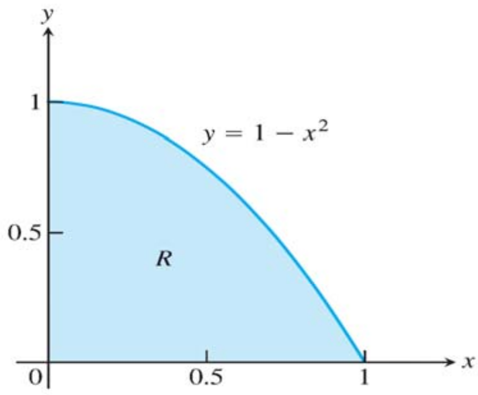
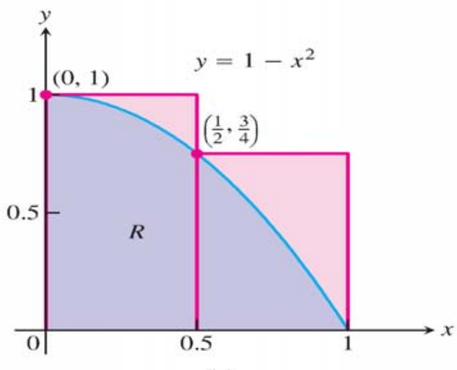
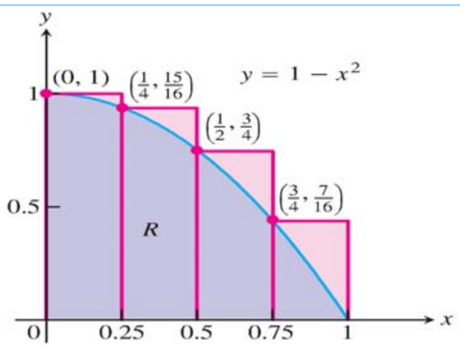


FIGURE 5.1 The area of the region R cannot be found by a simple formula.

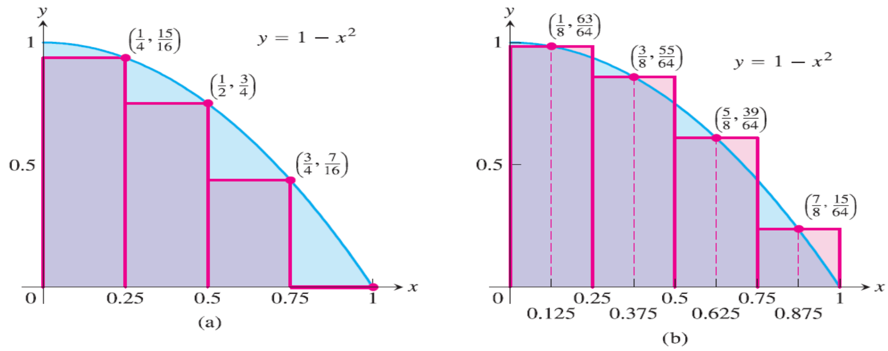
بشكل عام ليس من السهولة إيجاد المساحة R تحت المنحنيات بصيغ مبسطة !



لإيجاد المساحة R نقوم بتقريبها باستخدام مستطيلات بتجزئة الفترة $[0,1]$.



وكلما زادت عدد المستطيلات من خلال زيادة التجزئة على $[0,1]$ كلما كان التقريب أفضل .

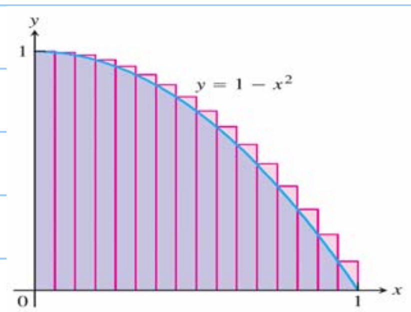


والحقيقة أنه يوجد أنواع من تقريب المساحة R بالمستطيلات (

منها المجموع الأعلى للمستطيلات U (Upper Sum) وهو المجموع الذي بدأنا به الشرح /

ومنها أيضاً المجموع الأدنى للمستطيلات L (Lower Sum) والموضح بالرسمة الأخيرة (a) / ومنها أيضاً مجموع النقطة الوسطية (Midpoint Sum) والموضح بالرسمة الأخيرة (b))

بالتأكيد من خلال الرسم يتضح أن المساحة R هي رقم بين المجموع الأدنى للمستطيلات والمجموع الأعلى وبالتالي $R \in [L, U]$



كلما زاد عدد المستطيلات أكثر فأكثر من خلال زيادة التجزئة للفترة $[a, b]$ كلما حدث التالي:

1. المجموع الأعلى للمربعات U يقل
2. المجموع الأدنى للمربعات L يزيد.
3. تبقى $L \leq U$ ولكن الفترة $[L, U]$ تصغر مما يجعل تقريب R أدق.

5.2 Sigma Notation and Limits of Finite Sums

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

The index k ends at $k = n$.

The summation symbol (Greek letter sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k is a formula for the kth term.

The index k starts at $k = 1$.

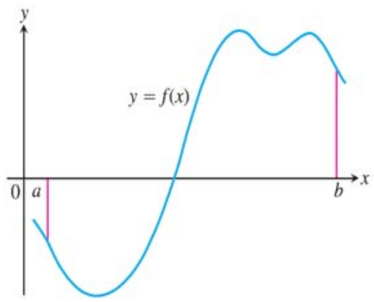
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2,$$

Illustration

A sum in sigma notation	The sum written out, one term for each value of k	The value of the sum
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Riemann Sums

افرض أنه لدينا الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$

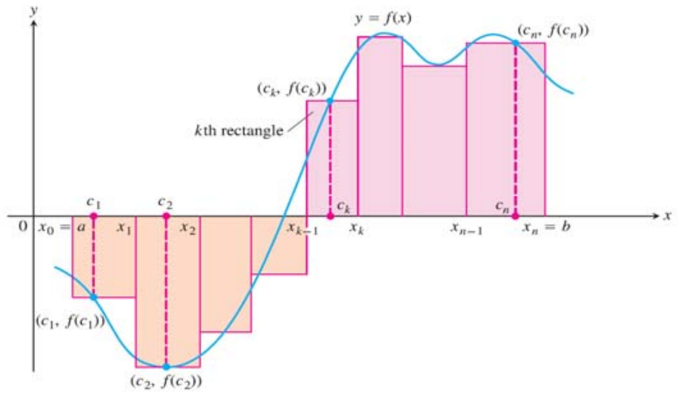


وكانت $P=\{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ كالتالي

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

وتم اختيار c_k نقطة عشوائية من الفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$

لتكوين المستطيل ومساحته فوق محور x هو $f(c_k)\Delta x_k$ وتحته $(-f(c_k)\Delta x_k)$ $K=1,2,\ldots,n$



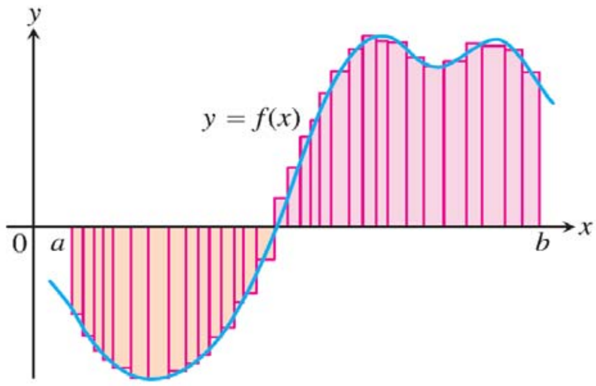
فإن مجموع هذه المستطيلات يسمى مجموع ريمان ويرمز له بالرمز S

لذلك

$$S = \sum_{K=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

ملاحظات: ١ـ المجموع الأدنى للمستطيلات، المجموع الأعلى والمجموع لنقطة المنتصف هي حالات خاصة من مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a,b]$.

٢ـ كلما زادت التجزئة كلما كانت مجاميع ريمان متقاربة القيمة وتساوي المساحة تحت المنحنى الموجب، وسالب المساحة فوق المنحنى السالب. انظر الرسم .



y
y = f(x)
0
a
b
x

5.3 The Definite Integral

Note Title ٢٣/٠١/١٠

Def: Let f be a fun on $[a,b]$. The definite integral of f from a to b is the unique number J – if exists – satisfies

$$L(P) \leq J \leq U(P)$$

for any partion P of $[a,b]$, where $L(P)$ is the lower sum and $U(P)$ is the upper sum of this partion. This number is denoted by

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ملحوظة: التعريف السابق يكافئ تعريف أن التكامل المحدد
يساوي نهاية مجموع ريمان لأي تجزئة عندما طول الفترات الجزئية
يؤول للصفر وهو يؤدي أن تكون $n \to \infty$ حيث n هو عدد الفترات الجزئية
للفترة $[a,b]$ والتعريف التالي هو تعريف التكامل باستخدام تعريف
النهاية.

DEFINITION Let $f(x)$ be a function defined on a closed interval $[a, b]$. We say that a number J is the **definite integral of f over $[a, b]$** and that J is the limit of the Riemann sums $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k$ if the following condition is satisfied:

Given any number $\epsilon > 0$ there is a corresponding number $\delta > 0$ such that for every partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ of $[a, b]$ with $\|P\| < \delta$ and any choice of c_k in $[x_{k-1}, x_k]$, we have

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k - J \right| < \epsilon.$$

طول أطول فترة في التجزئة

Integrable and Nonintegrable funs

إذا وجد رقم وحيد بين المجموع الأدنى والأعلى لكل التجزيئات على الفترة $[a,b]$ فإن
التكامل يكون معرفاً ويكافئ أن نهاية مجموع ريمان تكون موجودة في هذه الحالة يقال
للدالة f أنها قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$،
(f is integrable on $[a,b]$.)

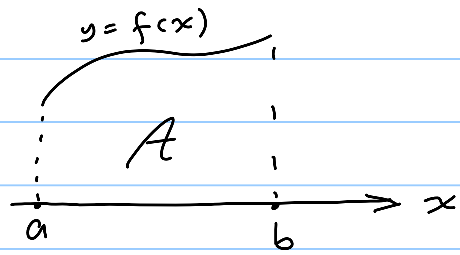
وإذا لم يكن هناك رقم وحيد / فإن التكامل المحدود غير موجود /

والدالة تكون غير قابلة للتكامل (nonintegrable on $[a,b]$)

THEOREM 1—Integrability of Continuous Functions If a function f is continuous over the interval $[a, b]$, or if f has at most finitely many jump discontinuities there, then the definite integral $\int_a^b f(x)\,dx$ exists and f is integrable over $[a, b]$.

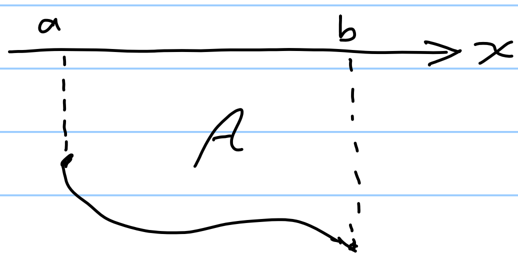
Defs. a) If f is integrable fun on $[a,b]$, and if $f(x) \geq 0$, then the area A under the curve and over the x-axis from a to b is equal

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



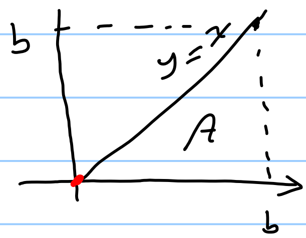
b) If $f(x) \leq 0$, then

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



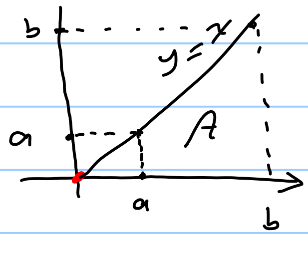
Examples:

1) $\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}\,b \cdot b = \frac{b^2}{2}$. (مساحة المثلث)



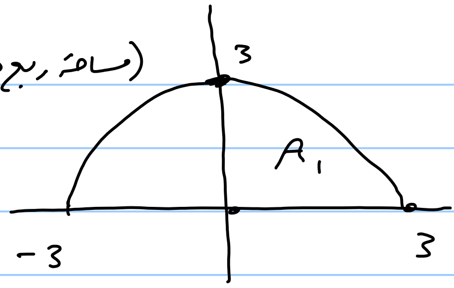
2) $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(a+b)(b-a)$ (مساحة شبه المنحرف)

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$



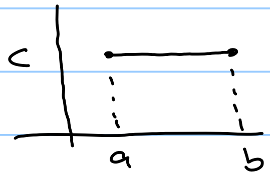
3) a) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi r^2$ (مساحة ربع دائرة)

$= \boxed{\dfrac{9\pi}{4}}$



b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi r^2 = \boxed{\dfrac{9\pi}{2}}$

4) $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c\,(b-a)$



Properties of the Definite Integrals

1. *Order of Integration:* $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — A Definition

2. *Zero Width Interval:* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — A Definition when $f(a)$ exists

3. *Constant Multiple:* $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — Any constant k

4. *Sum and Difference:* $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. *Additivity:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

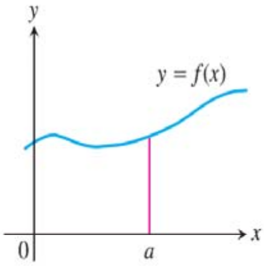
6. *Max-Min Inequality:* If f has maximum value $\max f$ and minimum value $\min f$ on $[a, b]$, then

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a).$$

7. *Domination:* $\displaystyle f(x) \ge g(x) \text{ on } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

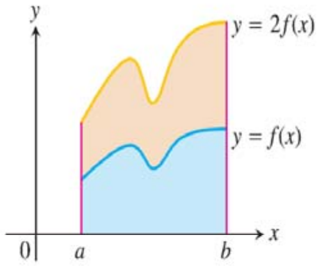
$$f(x) \ge 0 \text{ on } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$ (Special Case)

ملحوظة: كحالة خاصة، وعندما تكون الدوال موجبة فإن التكامل المحدود يمثل هندسياً بالمساحة تحت المنحنى، وعليه، يمكن توضيح القوانين السابقة هندسياً من خلال هذه الحالة الخاصة مع الأخذ بعين الاعتبار أن القوانين أشمل من هذه الحالة فقط.



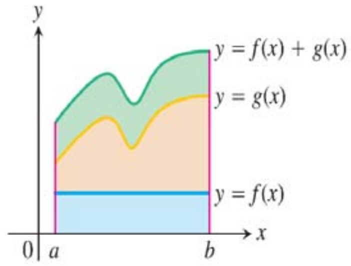
(a) *Zero Width Interval:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



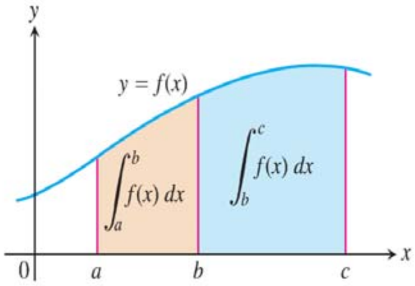
(b) *Constant Multiple:* $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$



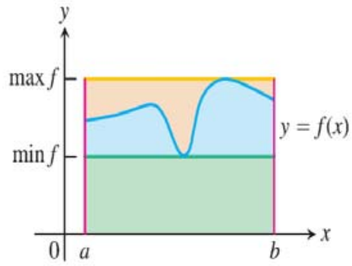
(c) *Sum: (areas add)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



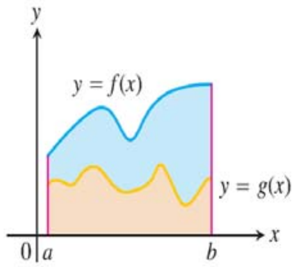
(d) *Additivity for definite integrals:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Max-Min Inequality:*

$$\min f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b - a)$$



(f) *Domination:*

$f(x) \ge g(x)$ on $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

Examples:

1) Suppose that $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$, $\int_0^5 f(x)\,dx = 8$ and $\int_2^5 g(x)\,dx = 1$. Evaluate $\int_5^2 \frac{1}{2} f(x) + 3g(x) - 2\,dx$

Sol:

$$\int_5^2 \frac{1}{2} f(x) + 3g(x) - 2\,dx = \frac{1}{2}\int_5^2 f(x)\,dx + 3\int_5^2 g(x)\,dx - \int_5^2 2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_5^0 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx\right) + 3\left(-\int_2^5 g(x)\,dx\right) - 2(2-5)$$

$$= \frac{1}{2}(-8 + 2) + 3(-1) + 6 = 0$$

ملحوظة: يمكنك حل السؤال بأكثر من طريقة و باستخدام خصائص مختلفة.

2) Evaluate $\int_1^3 f(x)\,dx$ if $f(x) = \begin{cases} x, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

sol:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 2\,dx = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + 2(3-2)$$

$$= \frac{3}{2} + 2 = \boxed{\frac{7}{2}}$$

3) Find upper and lower bounds for the definite integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$

sol: Let $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ on $[0,1]$.

clearly $m = \sqrt{1} = 1$ is abs. min of f and
$M = \sqrt{2}$ is abs. max of f (افحص ذلك)

so $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \implies$

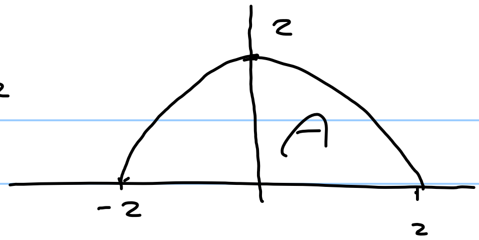
$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2}.$$

DEFINITION If f is integrable on $[a, b]$, then its **average value on $[a, b]$**, also called its **mean**, is

$$\operatorname{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

EXAMPLE 5 Find the average value of $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ on $[-2, 2]$.

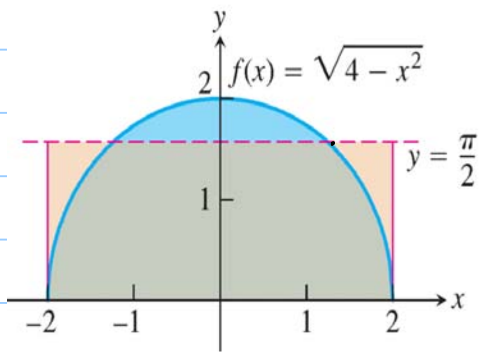
sol: $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = A = \frac{1}{2}\pi r^2$



$= 2\pi$

so $av(f) = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

التمثيل الهندسي لـ av(f) موضح بالرسمة التالية .



Mean Value Thrm for Definite Integral

THEOREM 3—The Mean Value Theorem for Definite Integrals If f is continuous on $[a, b]$, then at some point c in $[a, b]$,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx. \quad (= av(f))$$

Example: Apply MVT for definite integral on previous example.

sol: In previous example, f is continuous on $[-2,2]$

and we find $av(f) = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$

so $\exists\, c \in (-2,2)$ s.t. $f(c) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$.

$\sqrt{4-c^2} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 4 - c^2 = \frac{\pi^2}{4}$

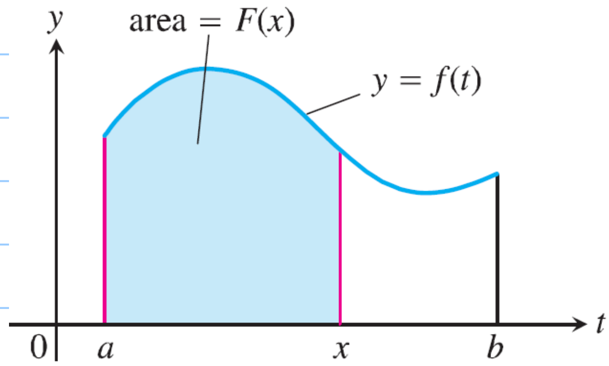
$\therefore\ c^2 = 4 - \frac{\pi^2}{4} = 1.533 \Longrightarrow c = \mp 1.238 \in (-2,2)$

5.4 The Fundamental Thrm of Calculus

Fundamental Theorem, Part 1

If $f(t)$ is an integrable function over a finite interval I, then the integral from any fixed number $a \in I$ to another number $x \in I$ defines a new function F whose value at x is

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$



THEOREM 4—The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1 If f is continuous on $[a, b]$, then $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) and its derivative is $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \qquad (2)$$

Corollories:

1) $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\,g'(x)$$

2) $$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$

ملحوظات : ١) لإثبات النتيجتين السابقتين ، نستخدم لذلك
النظرية السابقة مع قانون السلسلة وذلك

بكتابة التكامل $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ في (1) بالصورة

$$\int_a^{u} f(t)\,dt \quad , \quad u = g(x)$$

وفي (2) بالصورة

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$$

② صورة التكامل في النتيجة (2) يشمل الصورتين الأخيرتين.

Examples: Find y' if

$$y = \int_x^5 (3+\sqrt{t})^3\,dt$$

sol: لأن القانون الأخير هو قانون أشمل ويمكن تطبيقه مع جميع الحالات / لذلك سوف نستخدمه في الحل (مع الأخذ بعين الاعتبار إمكانية الحل بطريقة مختلفة).

$$y' = (3+\sqrt{5})^3 \cdot \cancelto{0}{\frac{d}{dx}(5)} - (3+\sqrt{x})^3 \cdot \cancelto{1}{\frac{d}{dx}\cdot x} = -(3+\sqrt{x})^3 .$$

2) $$y = \int_2^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$$

sol:

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2 x} \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = 1$$

(لاحظ أنه إذا كان أحد حدود التكامل ثابت فإن مشتقته تساوي صفر ولا داعي لتعويضه)

3) $$y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\,\sin t\,dt$$

$$y' = \sqrt{x^3} \cdot \sin x^3 \cdot 3x^2 - \sqrt{\sqrt{x}}\,\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

4) If $f(x) = \int_1^{\tan x} \sqrt{1+t^2}\, dt$, then find $f(\pi/4)$ and $f'(\pi/4)$.

Sol: $f(\pi/4) = \int_1^{\tan \pi/4} \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_1^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \boxed{0}$, and

$$f'(x) = \sqrt{1+\tan^2 x} \cdot \sec^2 x = |\sec x| \cdot \sec^2 x .$$

$$\therefore f'(\pi/4) = |\sqrt{2}| \cdot 2 = \boxed{2\sqrt{2}}$$

5) Find the fun $f(x)$ and the constant a if

$$2\int_a^x f(t)\,dt = 2\sin x - 1 \quad \text{and} \quad 0 \le a \le \pi/2 .$$

Sol: لايجاد الدالة يمكن إشتقاق الطرفين لنحصل على

$$2 f(x) = 2\cos x \Longrightarrow \boxed{f(x) = \cos x}$$

لايجاد a / هناك عدة طرق لذلك / حيث يمكن اجراء تكامل الطرف الأيسر إذا كان سهلاً ومساواته بالطرف الأيمن / وللسهولة عوض عدديه x ب a في الطرفين نحصل على

$$2\cancel{\int_a^a f(t)\,dt}^{\,0} = 2\sin a - 1 \Longrightarrow 2\sin a - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \sin a = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{a = \pi/6}$$

DEFINITION A function F is an **antiderivative** of f on an interval I if $F'(x) = f(x)$ for all x in I.

Example: Find an antiderivative of $f(x) = 2x$ on $\mathbb{R}$.

Sol: لاحظ أننا هنا بحاجة للتفكير بشكل عكسي / فما هي الدالة $F(x)$ التي اشتقاقها يساوي $f(x) = 2x$.

من خلال معرفتنا السابقة / معلوم أن $\frac{dx^2}{dx} = 2x$ لذلك يمكن أخذ

$$F(x) = x^2$$

لاحظ أنه باستخدام نتائج نظرية MVT / عكسها ؛ نجد $F(x)=x^2+C$ حيث C
هو ثابت، كما توضح النظرية التالية :

THEOREM 6 If F is an antiderivative of f on an interval I, then the most general antiderivative of f on I is

$$F(x) + C$$

where C is an arbitrary constant.

EXAMPLE 2 Find an antiderivative of $f(x) = 3x^2$ that satisfies $F(1) = -1$.

Sol: since $\frac{d x^3}{dx} = 3x^2$, we get the general antiderivative

$$F(x) = x^3 + C$$

since $F(1) = -1 \Rightarrow 1^3 + C = -1 \Rightarrow C = -2$ and

$$F(x) = x^3 - 2$$

[يسمى هذا النوع من المسائل بـ "initial value problems".]

THEOREM 4 (Continued)—The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2 If f is continuous at every point in $[a, b]$ and F is any antiderivative of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Examples: Evaluate the following integrals

1) $\int_{-1}^{1} 1 + 2x\,dx = x + x^2 \Big]_{-1}^{1} = (1 + 1^2) - (-1 + (-1)^2) = \boxed{2}$

2) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

3) $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x \Big]_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec(-\pi/4) = \boxed{1 - \sqrt{2}}$

4) $\int_{-1}^{2} |x^2 - 1| + 2x\,dx$

لاحظ ان $x^2-1=0$ عندما $x=\mp 1$

x^2-1: $+ + +$ (-1) $- - - - -$ (1) $+ + +$ (2)

وبالتالي فإنه على فترة التكامل

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{on } [-1,1] \\ x^2-1 & \text{on } [1,2] \end{cases}$$

وعليه

$$\int_{-1}^{2} |x^2-1| + 2x \, dx = \int_{-1}^{1} 1-x^2+2x \, dx + \int_{1}^{2} x^2-1+2x \, dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_{-1}^{1} + \frac{x^3}{3} - x + x^2 \Big]_{1}^{2} = \frac{4}{3} - \frac{13}{3} = \boxed{\frac{-9}{3}}$$

5.6 Substitution and Area Between Curves

Note Title ٢٣/٠١/١٧

بداية انظر للمثال التالي

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}$$

لحله يلزمنا في البداية إيجاد التكامل اللامحدود وذلك لنستطيع تطبيق النظرية الأساسية في التفاضل

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{du}{u^2} \qquad u = 1+x^2, \quad du = 2x\,dx$$

$$= \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{(1+x^2)} + C$$

ثم بعدها نأخذ الناتج للتعويض بحدود التكامل حسب نص النظرية الأساسية في التفاضل، وهنا لاحظ أنه يصح أخذ الناتج مع الثابت c أو بدونه، لذلك يفضل بدونه لنحصل على

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{1+x^2}\Big]_0^1 = \left(\frac{-1}{2}\right) - (-1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

لاحظ هنا أن التكامل المحدود في النهاية رقم، والطريقة السابقة طويلة في حساباتها، ويمكن اختصار الخطوات بالتعويض عن حدود التكامل حسب ما توضحه النظرية القادمة.

THEOREM 7—Substitution in Definite Integrals If g' is continuous on the interval $[a, b]$ and f is continuous on the range of $g(x) = u$, then

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

For the previous example,

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \int_1^2 \frac{du}{u^2} \qquad u = 1+x^2, \quad du = 2x\,dx$$

$$x = 0 \longrightarrow u = 1$$
$$x = 1 \longrightarrow u = 2$$

$$= -\frac{1}{u}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Examples: 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$2\,du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

at $x = 0 \longrightarrow u = 1$

at $x = 1 \longrightarrow u = 2$

$$= 2\int_1^2 \sqrt{u}\,du = 2\left(\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2$$

$$= \tfrac{4}{3}\left[\,2^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

2) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\,\csc^2\theta\,d\theta$

$u = \cot\theta$

$du = -\csc^2\theta\,d\theta$

$-du = \csc^2\theta\,d\theta$

at $\theta = \pi/4 \longrightarrow u = 1$

at $\theta = \pi/2 \longrightarrow u = 0$

$$= -\int_1^0 u\,du = -\frac{u^2}{2}\Big]_1^0$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[\,0 - 1\,\right] = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

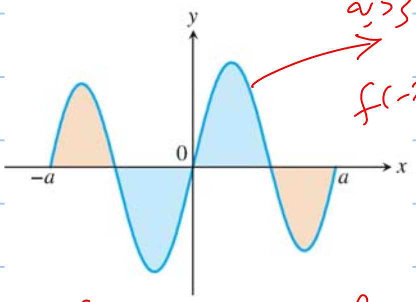
ملحوظة: في عملية التعويض البسيط ، يمكن أن يكون هناك أكثر من خيار مناسب لـ u ، وبالتالي يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة ، ففي المثال السابق ، لاحظ ما يلي :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\,\csc^2\theta\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc\theta \cdot \csc\theta\cot\theta\,d\theta$$

وعليه يمكن اختيار $u = \csc\theta$ لنحصل على $du = -\csc\theta\,\cot\theta$

وإكمال حل السؤال لنحصل على نفس النتيجة $\tfrac{1}{2}$ (Do it) .

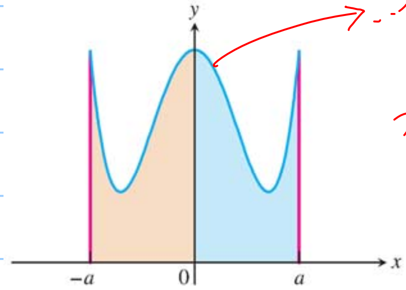
Definite Integrals of Symmetric funs



دالة فردية

$f(-x) = -f(x)$

تماثل حول نقطة الأصل.



دالة زوجية

$f(-x) = f(x)$

تماثل حول محور y

THEOREM 8 Let f be continuous on the symmetric interval $[-a, a]$.

(a) If f is even, then $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

(b) If f is odd, then $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

البرهان في كلا الحالتين يتم من خلال تجزئة التكامل $\displaystyle\int_{-a}^{a} f\,dx = \int_{-a}^{0} f\,dx + \int_{0}^{a} f\,dx$

Examples: 1) Evaluate $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$.

sol: نلاحظ في البداية أن الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ هي دالة زوجية

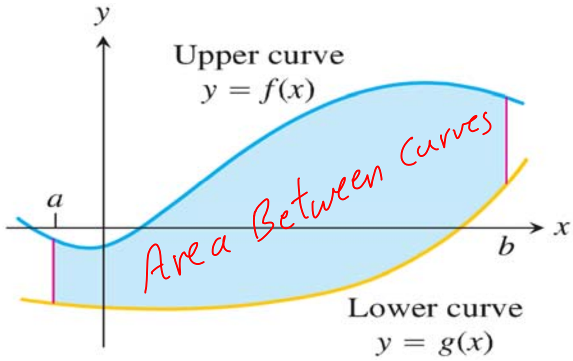
لأن $f(-x) = f(x)$ وعليه

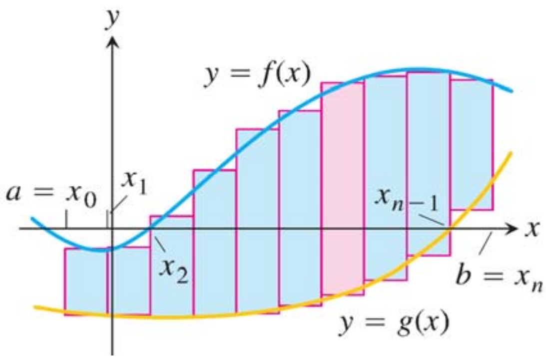
$$\int_{-2}^{2} x^4 - 4x^2 + 6\,dx = 2\int_{0}^{2} x^4 - 4x^2 + 6\,dx = 2\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2$$

$$= 2\left(\frac{2^5}{5} - \frac{4}{3}2^3 + 12\right) - 0 = \frac{232}{15}$$

2) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \, dx = 0$ ($y = \sin x$ is odd fun)

Area Between Curves





لإيجاد المساحة بين المنحنيين يمكن إيجاد مجموع ريمان وأخذ النهاية له وبالتالي
نستطيع تعريف المساحة بين المنحنيين بالتكامل.

DEFINITION If f and g are continuous with $f(x) \geq g(x)$ throughout $[a, b]$, then the **area of the region between the curves $y = f(x)$ and $y = g(x)$ from a to b** is the integral of $(f - g)$ from a to b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

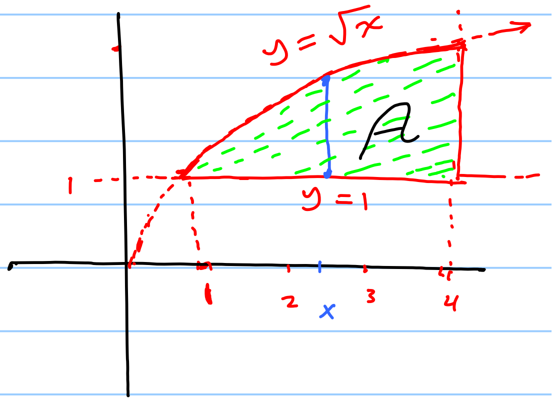
Examples:

1) Find the area of the region bounded by the curves $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, and $x = 4$.

Sol: بداية / لإيجاد حدود التكامل / نقوم بإيجاد نقطة التقاطع بين المنحنيين $y=\sqrt{x}$ / $y=1$

$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

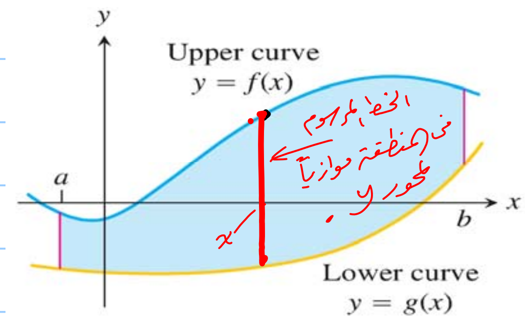
وبالتالي فإنه المساحة A تساوي



$$A = \int_1^4 \sqrt{x} - 1 \, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \Big]_1^4 = \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{5}{3}.$$

خطوات إيجاد المساحة



1- رسم المنحنيات لتحديد المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها وحدودها وتحديد المنحنى الأكبر والمنحنى الأصغر.

2- رسم خط في داخل المنطقة موازياً لمحور y (في حالات معينة، قد يكون الأنسب أن يكون موازياً لمحور x).

3- كتابة المعادلات بالصورة المناسبة كالتالي:

أ- إذا كان الخط المرسوم موازياً لمحور y نقوم بكتابة معادلات المنحنيات بالصورة $y=f(x)$ / $y=g(x)$ / ... إلخ.

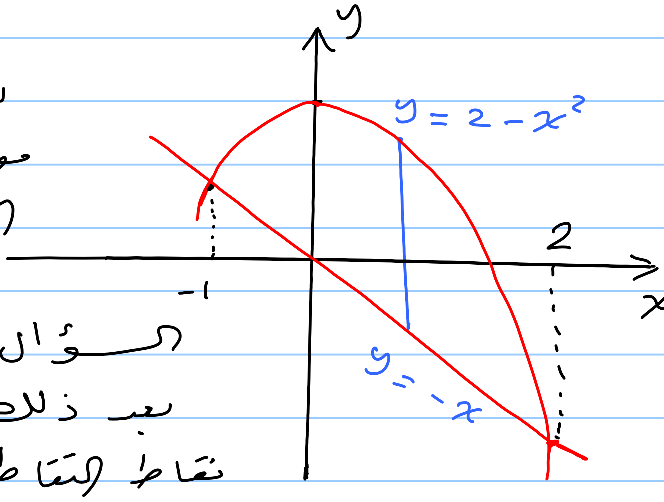
ب- إذا كان موازياً لمحور x فيجب كتابة المعادلات بالصورة المقابلة $x=h(y)$ / $x=k(y)$ / .. إلخ.

4- كتابة معادلة طول الخط $l(x) = f(x) - g(x)$ حيث $f(x)$ هو المنحنى الأكبر مع الأخذ بعين الإعتبار الحالة الثانية عندما يكون موازياً لمحور x.

5- المساحة المطلوبة هي تكامل طول الخط على حركته كالتالي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx.$$

2) Find the area of the region enclosed by $y = 2 - x^2$ and $y = -x$.



Sol: بداية نرسم خطاً في داخل المنطقة موازياً لمحور y ، ونكتب المعادلات بالصورة المناسبة $y = 2 - x^2$ ، $y = -x$ [لاحظ هنا أن الصورة المناسبة نفس الصورة المعطاة من السؤال دون تغيير].

بعد ذلك نقوم بإيجاد حدود التكامل ، وهي هنا نقاط التقاطع بين المنحنيين [عادةً تحدد مجال حركة الخط في المنطقة]

$$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, 2.$$

ثم نكتب معادلة طول الخط

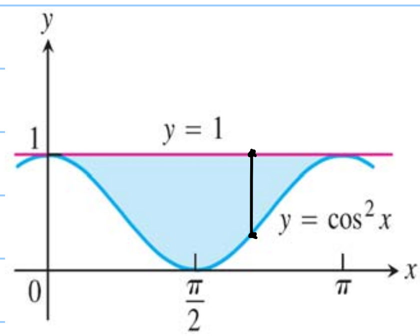
$$l(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 - x^2 + x$$

أخيراً المساحة المطلوبة هي

$$A = \int_{-1}^{2} 2 - x^2 + x \, dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

3) Find the area of the region bounded by the curves $y = \cos^2 x$ and $y = 1$ from $x = 0$ to $x = \pi$.



Sol:

$$A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \, dx$$

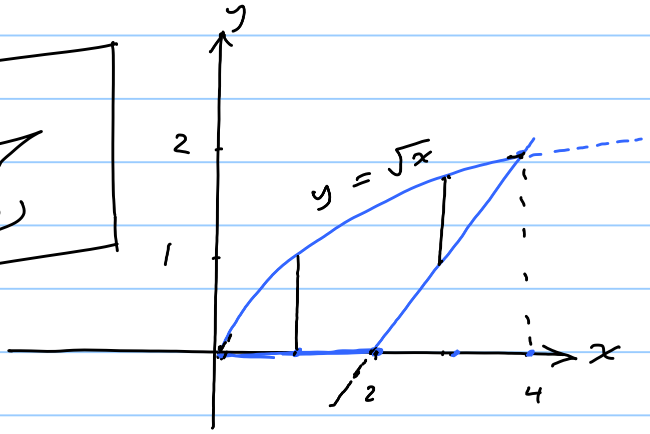
$$= \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\left(\pi - \cancel{\frac{\sin 2\pi}{2}}^{\,0}\right) - \left(0 - \cancel{\frac{\sin 0}{2}}^{\,0}\right) \right] = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

4) Find the area of the region in the first quadrant that in bounded above by $y=\sqrt{x}$ and below by x-axis and $y=x-2$.

Sol:

سنقوم بحل السؤال بطريقتين ،



حل 1

خذ الخط المرسوم داخل المنطقة موازياً لمحور y
واكتب المعادلات بالصورة المناسبة $y=\sqrt{x}$ ، $y=0$ ، $y=x-2$.
لاحظنا أنه طول الخط يتغير بعد النقطة 2 .
ثم إيجاد حدود التكامل . $\sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=(x-2)^2$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1,4.$$

لاحظ أنه $x=1$ ليست نقطة تقاطع ، وأنه $x=4$ هي نقطة تقاطع (لماذا).

معادلات طول الخط

In the interval $[0,2]$, $l=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$.

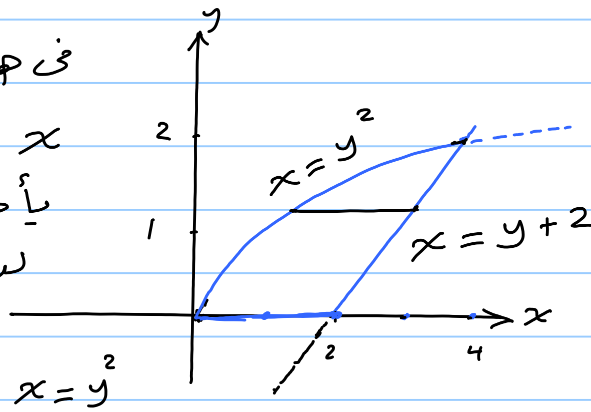
In the interval $[2,4]$, $l=\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2$.

$$\Rightarrow l(x)= \text{طول الخط} = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0\le x\le 2 \\ \sqrt{x}-x+2, & 2\le x\le 4. \end{cases}$$

$$\therefore A=\int_0^4 l(x)\,dx=\int_0^2 \sqrt{x}\,dx+\int_2^4 \sqrt{x}-x+2\,dx=\boxed{\frac{10}{3}}$$

حل 2

في هذا الحل ، نلاحظ أنه الخط إذا رسم موازياً لمحور x فإنه طول على حركته لا تتغير معادلته بل يأخذ معادلة واحدة فقط ،
لذلك خذ الخط المرسوم داخل المنطقة موازياً لمحور x ، واكتب المعادلات بالصورة $x=y+2$ ، $x=y^2$ ثم حدد حركة الخط في المنطقة



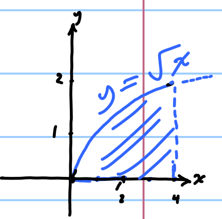
من 0 إلى 2 على محور y . وعليه فإن طول الخط يأخذ معادلة واحدة فقط هي

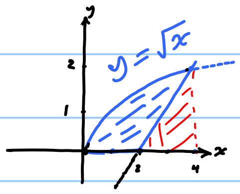
$$\ell(y) = (y+2) - y^2$$

المنحنى الأكبر - المنحنى الأصغر / وهنا المنحنى الأكبر هو المنحنى على اليمين.
[في اتجاه محور x يكون المنحنى الأكبر على اليمين / وفي اتجاه y يكون المنحنى الأكبر هو المنحنى الأعلى].

$$\therefore A = \int_0^2 (y+2) - y^2 \, dy = \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \Big]_0^2 = \boxed{\frac{10}{3}}$$

ملحوظة: بشكل خاص من هذا السؤال / يمكن إيجاد المساحة تحت المنحنى $y=\sqrt{x}$ من 0 إلى 4 ثم نطرح منه مساحة المثلث المظلل.





$$A = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{2}(2)(2) = \frac{2}{3} * 8 - 2 = \boxed{\frac{10}{3}}$$

ملحق لهذا الفصل

1) $$\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{\frac{3}{2}})^2} \, dv$$

$u = 1 + v^{\frac{3}{2}}$

$du = \frac{3}{2} v^{\frac{1}{2}} \, dv$

$\frac{2}{3} du = \sqrt{v} \, dv$

$v = 1 \longrightarrow u = 1$

$v = 4 \longrightarrow u = 9$

$$= 10 \cdot \frac{2}{3} \int_1^9 \frac{du}{u^2} = \frac{20}{3} \cdot \frac{-1}{u} \Big]_1^9$$

$$= \frac{20}{3}\left[1 - \frac{1}{9}\right] = \boxed{\frac{160}{27}}$$

2) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4 + 5\sin z}} \, dz$$

$u = 4 + 5\sin z$

$du = 5\cos z \, dz$

$\frac{du}{5} = \cos z \, dz$

$z = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 9$

$z = \pi \longrightarrow u = 4$

$$= \frac{1}{5}\int_9^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{u} \Big]_9^4 = \boxed{\frac{-2}{5}}$$

3) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+5\sin z}}\, dz .$$

$u = 4 + 5\sin z$

$du = 5\cos z\, dz$

$\frac{du}{5} = \cos z\, dz .$

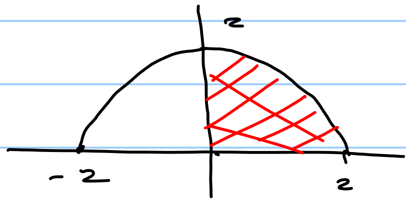
$z = -\pi \longrightarrow u = 4$

$z = \pi \longrightarrow u = 4 .$

So $$\frac{1}{5}\int_{4}^{4} \frac{du}{\sqrt{u}} = \boxed{0}$$

4) $$\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \text{مساحة ربع الدائرة}$$

$$= \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \boxed{\pi}$$



5) $$\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\, dx$$

$u = 4 - x^2$

$du = -2x\, dx$

$\frac{du}{-2} = x\, dx$

$x = 0 \longrightarrow u = 4$

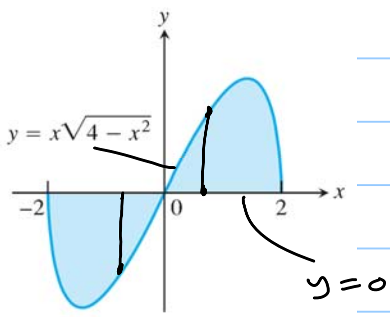
$x = 2 \longrightarrow u = 0$

$$= \frac{-1}{2}\int_{4}^{0} \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big]_{4}^{0}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[0 - 8\right] = \boxed{\frac{8}{3}}$$

6) Find the area of the shaded region.

(a)



Sol:

حل 1

باستخدام فكرة Total Area بإيجاد المساحة
بين منحنى وبين محور x كما يلي

$$A = \left|\int_{-2}^{0} x\sqrt{4-x^2}\right| + \left|\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\right| = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

(انظر مثال (5) السابق).

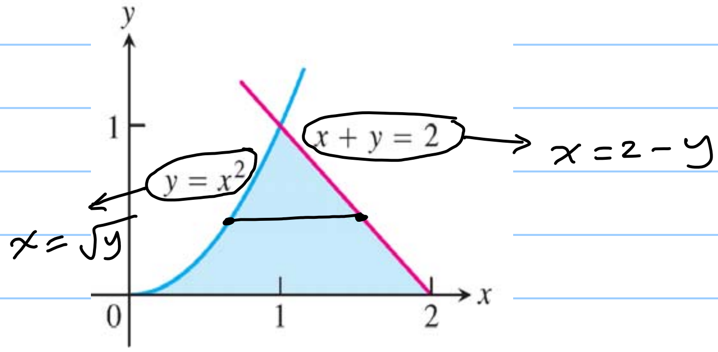
حل 2

باستخدام المساحة بين المنحنيات باعتبار محور x نحنى معادلته $y = 0$.
هنا نجد أن طول الخط سيتغير كالتالي

$$l(x) = \begin{cases} 0 - x\sqrt{4-x^2}, & -2 \le x < 0 \\ x\sqrt{4-x^2} - 0, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\therefore A = \int_{-2}^{0} -x\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{\frac{16}{3}}$$

(b)

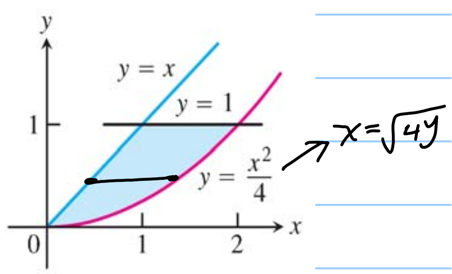


sol: نلاحظ هنا أن رسم الخط في المنطقة موازياً لمحور y يجزئ تكامل المساحة (Do it) ، ومن المقابل فإن رسمه موازياً لمحور x يجعل المساحة تكامل واحد.
لذلك نفضل رسم الخط موازياً لمحور x وكتابة المعادلات $x = 2-y$ ، $x = \sqrt{y}$
وحدود التكامل هي مجال حركة الخط من 0 إلى 1 على محور y . وبالتالي

$$A = \int_{0}^{1} (2-y) - \sqrt{y}\;dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{5}{6}}$$

7) Find the area of the region bounded above by the curves $y = x$ and $y = 1$, and below by $y = x^2/4$.

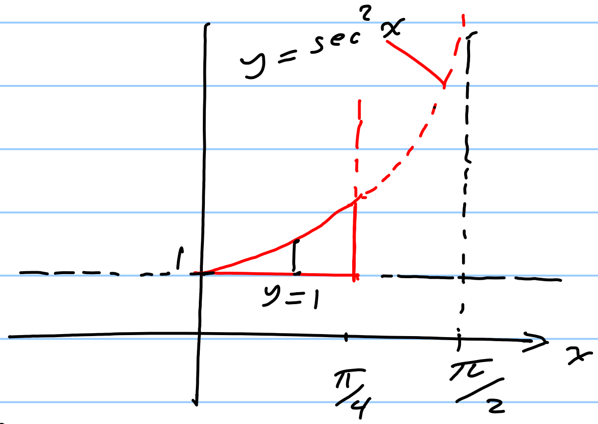
sol: ارسم خط موازي لمحور x وأعد كتابة
المعادلات بالصورة $x = y$ ، $x = \sqrt{4y}$
وبالتالي



$$A = \int_{0}^{1} (\sqrt{4y} - y)\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(4y)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}\,4^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

8) Find the area of the region between the curves $y = \sec^2 x$, $y = 1$, $x = 0$ and $x = \pi/4$.



sol:

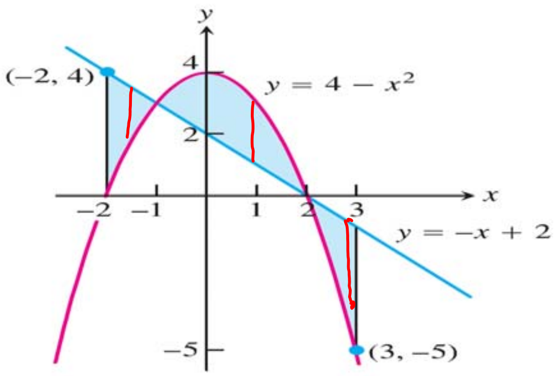
$$A = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x - 1 \, dx$$

$$= \tan x - x \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\tan \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}\right) - \left(\tan 0 - 0\right)$$

$$= \boxed{1 - \tfrac{\pi}{4}}$$

9) Find the area of the shaded region in figure



Sol:

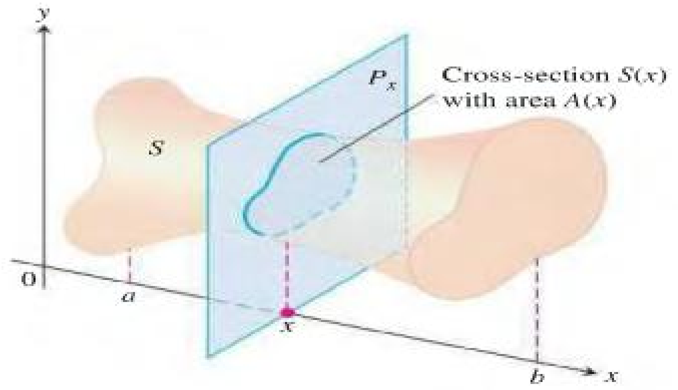
$$A = \int_{-2}^{-1} (2-x) - (4-x^2) \, dx + \int_{-1}^{2} (4-x^2) - (2-x) \, dx + \int_{2}^{3} (2-x) - (4-x^2) \, dx$$

$$= \boxed{\frac{49}{6}}$$

End of chapter 5

Ch6 Applications of Definite Integrals

6.1 Volumes Using Cross-Sections



لإيجاد حجم الجسم في الدراسة أوجد مساحة القطاع العرضي $A(x)$ بدلالة x ،
وبالتالي يكون الحجم هو تكامل المساحة على حركتها .

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

DEFINITION The **volume** of a solid of integrable cross-sectional area $A(x)$ from $x = a$ to $x = b$ is the integral of A from a to b,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

وتسمى هذه الطريقة ب Volume by slicing (الحجم بالطريقة الشرائح) .

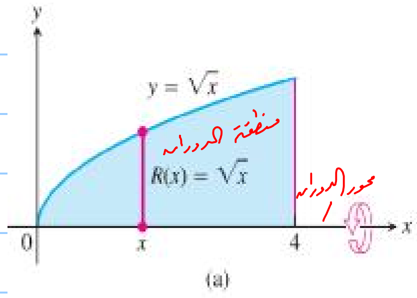
ملحوظة : في الأشكال المنتظمة مثل متوازي المستطيلات وغيره / معروف أن الحجم يساوي المساحة $\times$ الارتفاع / وبالتالي نجد أن طريقة إيجاد الحجم بالشرائح السابقة هي تعميم لما هو معروف ليشمل الأشكال غير المنتظمة .

Solids of Revolution: The Disk and the Washer Methods

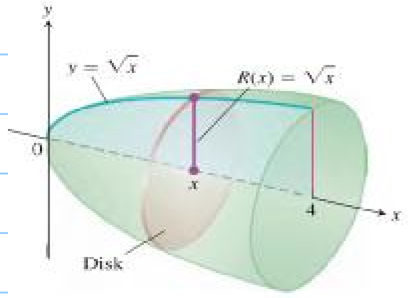
الأجسام الدورانية هي أجسام ناتجة عن دوران منطقة حول محور ، وطريقتي ب disk / Washer هما حالات خاصة من طريقة الحجم بالشرائح / حيث أن القطاع العرضي من الأجسام الدورانية يكون

إما قرص (disk) وإما قرص مثقوب أو ما يعرف بـ حلقة (washer).

Disk Method



بعد الدوران



في الأجسام الدورانية ، عندما لا توجد مسافة فاصلة بين منطقة الدوران وبين محور الدوران فإن الناتج جسم مصمت ، في هذه الحالة يكون القطاع العرضي فيه قرص وبالتالي مساحة هذا القرص هي

$$A(x) = \pi (\text{radius})^2 = \pi [R(x)]^2$$

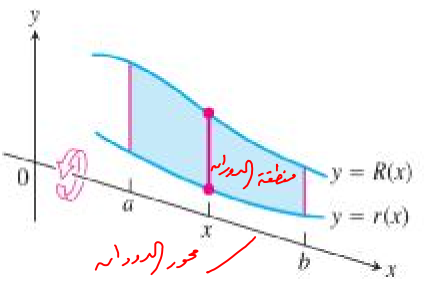
وبالتالي فإن الحجم للجسم الدوراني

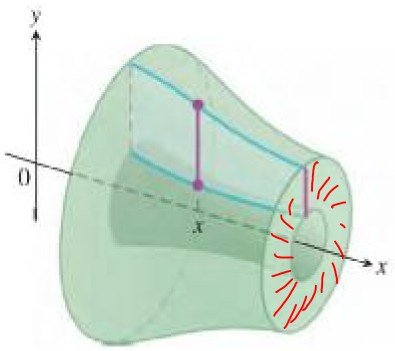
Volume by Disks for Rotation About the x-axis

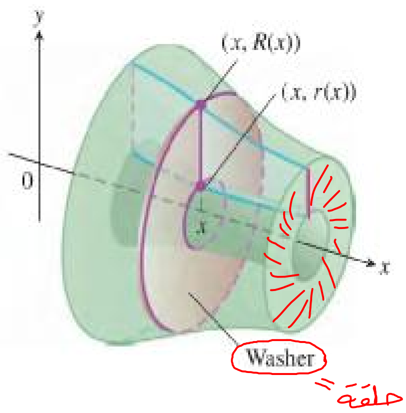
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx.$$

ملحوظة: لاحظ أن القطاع العرضي ينتج من دوران الخط المرسوم داخل منطقة الدوران عمودياً على محور الدوران ، في هذه الحالة ، يكون طول الخط هو نصف القطر $R(x)$.

Washer Method







عندما تكون هناك مسافة فاصلة بين منطقة الدوران وبين محور الدوران ، فإن
الجسم الدوراني الناتج يكون أجوف ، من هذه الحالة يكون القطاع العرضي
الناتج هو حلقة لها نصف قطر داخلي $r(x)$ ونصف قطر خارجي $R(x)$
وتكون مساحة هذه الحلقة

$$A(x) = \pi\left[[R(x)]^2 - [r(x)]^2\right]$$

وبالتالي فإن حجم الجسم الدوراني الأجوف بطريقة الحلقات (Washer)

Volume by Washers for Rotation About the *x*-axis

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

where

Outer radius : $R(x)$

Inner radius : $r(x)$.

ملحوظات: ١- لاحظ أن القطاع العرضي ينتج من دوران الخط المرسوم داخل
منطقة الدوران عمودياً على محور الدوران ، في هذه الحالة ، يكون
الناتج هو حلقة (Washer).

2- لاحظ أن طريقة Disk هي حالة خاصة من طريقة Washer يكون فيها
$r(x)=0$ مما يجعل الجسم مصمتاً.

3- لتحديد نصف القطر الداخلي $r(x)$ (inner radius) ونصف القطر الخارجي
$R(x)$ (outer radius) ،

أ- نرسم منطقة الدوران ونحدد محور الدوران.

ب- نرسم خط داخل منطقة الدوران عمودياً على محور الدوران وبذلك يكون

$r(x)$: المسافة بين محور الدوران وبين النقطة الأقرب على الخط المرسوم ،

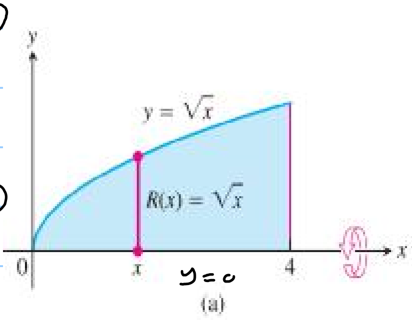
$R(x)$: المسافة بين محور الدوران وبين النقطة الأبعد على الخط المرسوم.

4- عند رسم الخط داخل المنطقة عمودياً على محور الدوران ، يجب كتابة معادلة المنحنيات
بالطريقة المناسبة ، فإن كان **موازياً** لمحور y يجب كتابة المعادلات على
شاكلة $y=f(x)$ وإذا كان **موازياً** لمحور x تكتب على شاكلة $x=g(y)$.

Examples:

1) (**EXAMPLE 4**) The region between the curve $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find its volume.

Sol: ① نرسم منطقة الدوران ، ونحدد محور الدوران
واضح أنه لا توجد مسافة فاصلة بين المنطقة وبين محور الدوران ،
② ارسم خط داخل المنطقة عمودياً على محور الدوران .
③ الخط يوازي محور y لذلك نكتب المعادلات بصورة $y = f(x)$:



$y = \sqrt{x}$ المنحنى الأعلى .
$y = 0$ محور الدوران
وبالتالي يكون طول الخط $R[x] = \sqrt{x} - 0$ هو نصف القطر .

(iv) حدود التكامل هي مجال حركة الخط وهي من 0 إلى 4 على محور x .

By Disk Method,

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big]_0^4 = \boxed{8\pi}$$

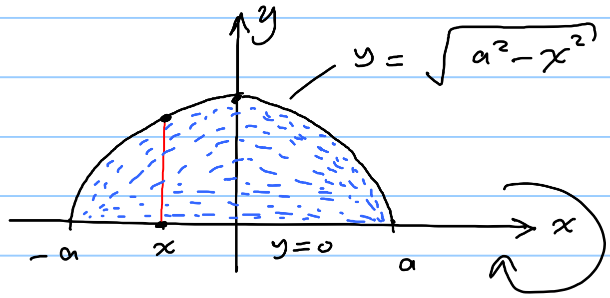
ملحوظة هامة : يمكن حل السؤال السابق باستخدام طريقة Washer حيث يكون $r(x) = 0$ (المسافة بين محور الدوران وبين النقطة الأقرب على الخط المرسوم)
وبالتالي نستطيع طريقة Washer نحصل على نفس النتيجة .
لذلك سنستخدم طريقة Washer في جميع الأمثلة القادمة لأنها أعم .

2) (**EXAMPLE 5**) The circle

$$x^2 + y^2 = a^2$$

is rotated about the x-axis to generate a sphere. Find its volume.

Sol: نلاحظ أنه الجسم الكروي يمكن توليده من دوران النصف العلوي من الدائرة فقط وقانونه $y=\sqrt{a^2-x^2}$ ،



[نلاحظ أنه لا يمكن تطبيق طرق إيجاد الحجم السابقة إلا على الدوال، وحيث أنه $x^2+y^2=a^2$ فإنه $y^2=a^2-x^2$ وعليه فإنه $|y|=\sqrt{a^2-x^2}$ ، ولكن $|y|=y$ عندما $y>0$] .

By Washer Method

$$r(x)=0$$

$$R(x)=\sqrt{a^2-x^2}-0 .$$

أبعد نقطة عن محور الدوران   محور الدوران

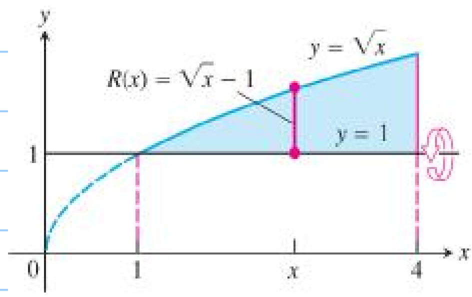
$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\boxed{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

3) **EXAMPLE 6** Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=\sqrt{x}$ and the lines $y=1, x=4$ about the line $y=1$.

Sol: محور الدوران هو الخط $y=1$

نرسم خط داخل المنطقة عمودي على محور الدوران.

واضح أنه يوازي محور y لذلك تكتب المعادلات على صورة $y=\sqrt{x}$, $y=1$.



لإيجاد حدود التكامل يجب تحديد مجال حركة الخط ، $\underline{x=1}$ $\Leftarrow$ $\sqrt{x}=1$

Using Washer Method:

معادلة محور الدوران   معادلة أقرب نقطة

$$r(x)=1-1=0$$

$$R(x)=\sqrt{x}-1$$

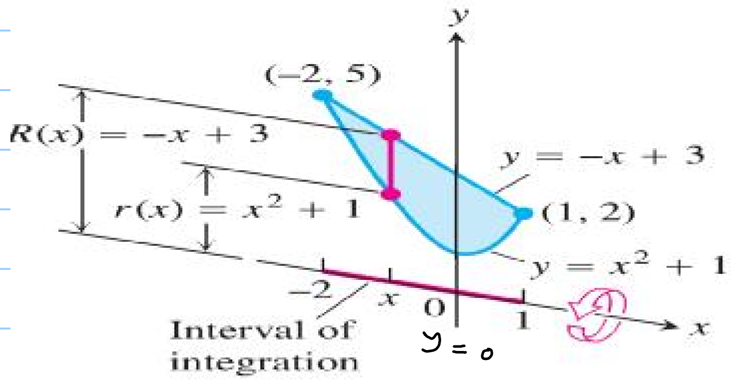
$$\Rightarrow V=\pi\int_{1}^{4}\left[\sqrt{x}-1\right]^2-0^2\,dx=\pi\int_{1}^{4}x-2\sqrt{x}+1\,dx=\frac{7\pi}{6}$$

ملحوظات: 1) في المثال السابق يمكن تطبيق طريقة القرص حيث نصف القطر $R(x) = \sqrt{x} - 1$ فيساوي طول الخط ونحصل على نفس النتيجة.

2) ايجاد نصف القطر الداخلي أو الخارجي من طريقة Washer يتم من خلال حساب المسافة بين محور الدوران والنقطة الأقرب أو الأبعد عنه / من طريقة طرح معادلة المنحنى الأكبر — المنحنى الأصغر.

4) **(EXAMPLE 9)** The region bounded by the curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = -x + 3$ is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

Sol:



بعد رسم المنطقة وتحديد منطقة الدوران / ومحور الدوران / نرسم خط داخل المنطقة عمودي على محور الدوران / موازياً لمحور y ونكتب المعادلات $y = x^2 + 1$ / $y = 3 - x$.

لإيجاد حدود التكامل (مجال حركة الخط) نقاطع المنحنيين

$$x^2 + 1 = 3 - x \Longrightarrow x = -2, 1$$

$$r(x) = x^2 + 1 - 0, \quad R(x) = (3 - x) - 0$$

$$\therefore V = \pi \int_{-2}^{1} (3-x)^2 - (x^2+1)^2 \, dx = \pi \int_{-2}^{1} 8 - 6x - x^2 - x^4 \, dx$$

$$= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{1} = \boxed{\frac{117}{5} \pi}$$

5) Find the volume of the solid generated by revolving the region between y-axis, $y = \frac{2}{x}$ and $1 \leq y \leq 4$ about the y-axis.

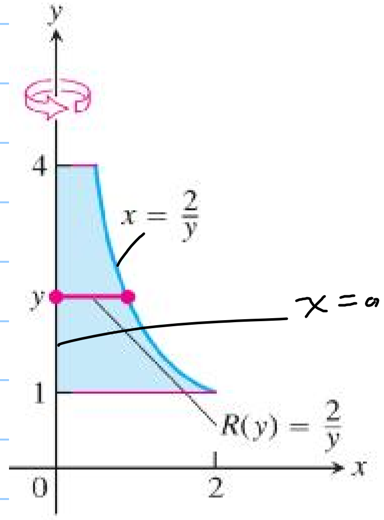
Sol:

(i) ارسم منطقة الدوران وحدد محور الدوران.

(ii) ارسم خط عمودي على محور الدوران داخل المنطقة (لاحظ انه يوازي محور x).

(iii) اكتب معادلة المنحنيات ما بصورة المناسبة $x = g(y)$:

$x = 0$ (محور الدوران) and $x = \frac{2}{y}$



$r(y) = 0$, $R(y) = \frac{2}{y} - 0$.

$$\therefore V = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 - 0^2 \, dy = 4\pi \left(\frac{-1}{y}\right]_1^4 = \boxed{3\pi}$$

6) Find the volume of the solid generated by revolving the region between the parabola $x = y^2 + 1$ and the line $x = 3$, (i) about $x = 3$. (ii) about $x = 0$.

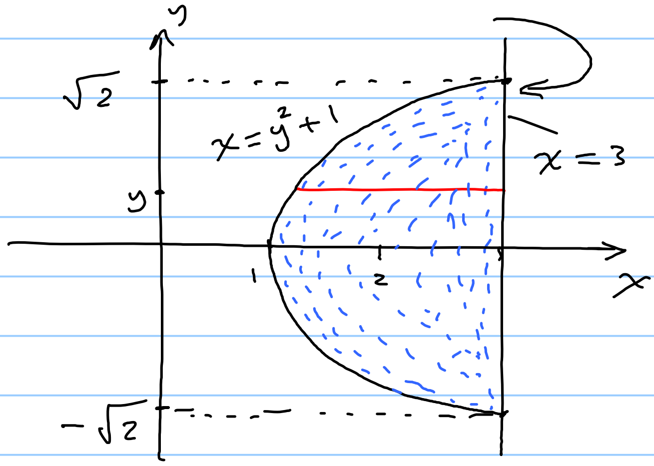
Sol:

(i) نرسم خط داخل المنطقة عمودي على محور الدوران موازي لمحور x، ونكتب المعادلات للمنحنيات بصورة $x = f(y)$ ، (انظر الشكل).

لإيجاد حدود التكامل /

$y^2 + 1 = 3 \implies y^2 = 2$

$\implies y = \mp\sqrt{2}$

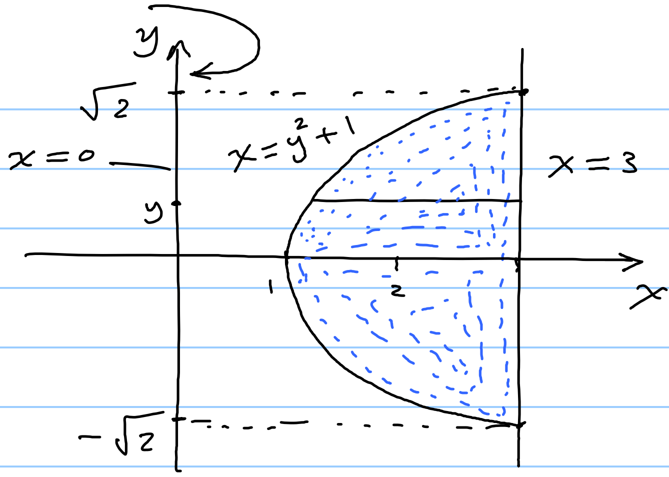


By Washer Method:

$r(y) = 0$, $R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2$

$$\therefore V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 - 0^2 \, dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 4y^2 + y^4 \, dy = \boxed{\frac{64}{15}\sqrt{2}\,\pi}$$

ii) By Washer Method



$r(y) = y^2+1 - 0$

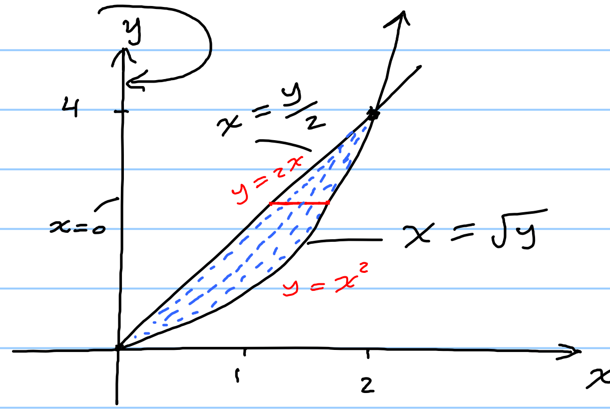
$R(y) = 3 - 0 = 3$

$$\therefore V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3^2 - (y^2+1)^2 \, dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 9 - y^4 - 2y^2 - 1 \, dy$$

$$= \pi \left(8y - \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{176}{15}\pi}$$

7) (**EXAMPLE 10**) The region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

<u>Sol:</u>



ارسم خط داخل المنطقة عمودي

على محور الدوران وموازي لمحور x ، لذا

اكتب المعادلات بالصورة $x = f(y)$

حدود التكامل :

$$\frac{y}{2} = \sqrt{y} \Rightarrow y^2 = 4y \Rightarrow y = 0, 4$$

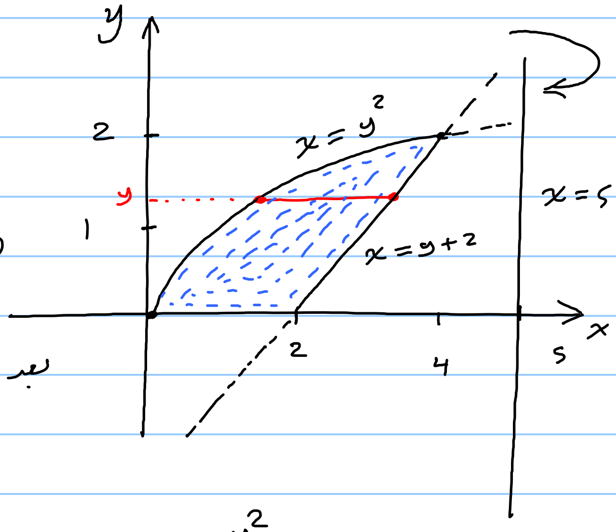
<u>Washer Method</u> $r(y) = \frac{y}{2} - 0$, $R(y) = \sqrt{y} - 0$

$$\therefore V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 y - \frac{y^2}{4} \, dy = \boxed{\frac{8}{3}\pi} .$$

8) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=\sqrt{x}$, x-axis , and $y = x-2$, i) about $x=5$. (ii) about $y=-1$.

sol: (i)

بعد تحديد منطقة الدوران و محور الدوران / ارسم
خط داخل المنطقة عمودياً على محور الدوران / سيكون
هنا موازياً لمحور x وعليه نكتب المعادلات بصورة
$x=f(y)$. (انظر الرسمة)



بعدها تحديد حدود التكامل من مجال حركة الخط من 0 إلى 2 .

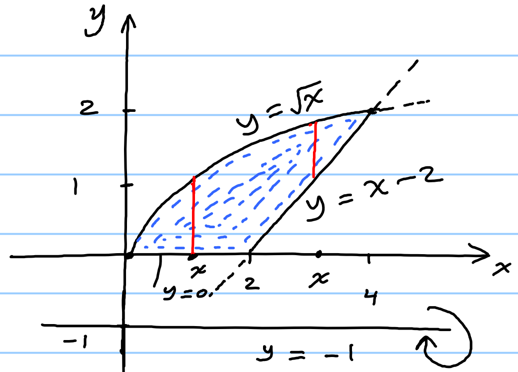
By Washer Method:

$r(y) = 5-(y+2) = 3-y$, $R(y) = 5-y^2$

$$\therefore\ V = \pi \int_0^2 (5-y^2)^2-(3-y)^2\,dy = \pi \int_0^2 25-10y^2+y^4-9+6y-y^2\,dy$$

$$= \pi\left(16y-\frac{11}{3}y^3+\frac{y^5}{5}+3y^2\right]_0^2 = \boxed{\frac{316}{15}\pi}$$

ii) الخط داخل المنطقة عمودي على محور الدوران
يوازي محور y لذلك نغير كتابة المعادلات
بصورة $y=f(x)$.



By Washer Method:

في هذا المثال يجب التجزئة

In the interval $[0,2]$:

$r(x) = 0-(-1) = 1$, $R(x) = \sqrt{x}-(-1) = \sqrt{x}+1$

In the interval $[2,4]$:

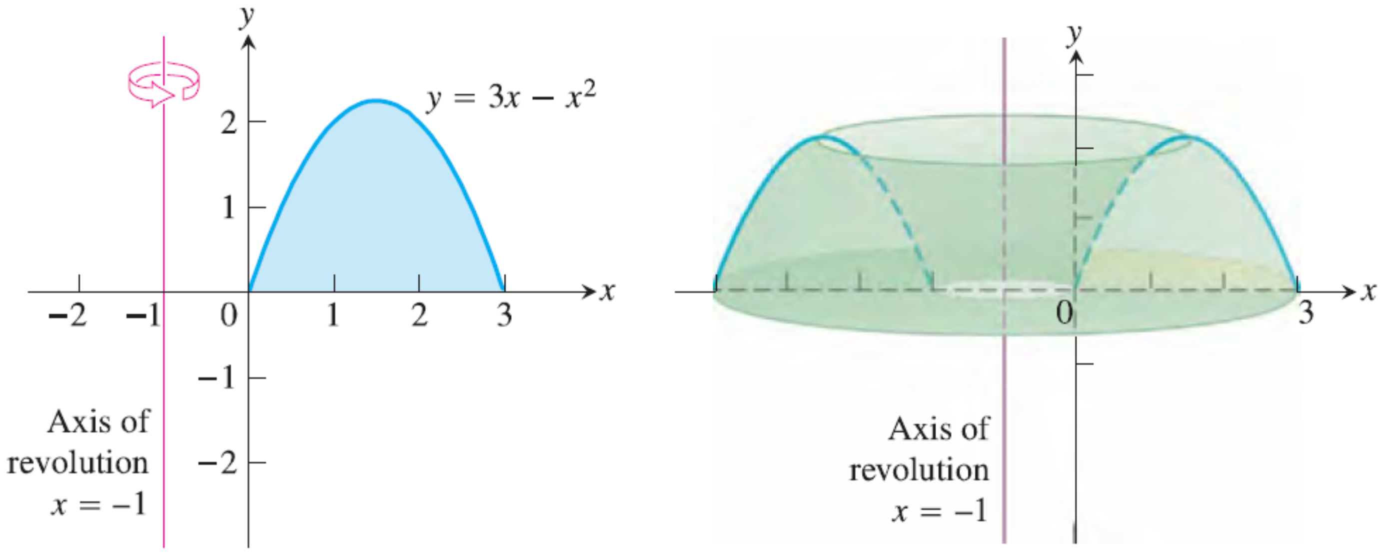
$r(x) = (x-2)-(-1) = x-1$, $R(x) = \sqrt{x}-(-1) = \sqrt{x}+1$

$$\therefore\ V = \pi\left[\int_0^2 (\sqrt{x}+1)^2 - 1^2\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x}+1)^2-(x-1)^2\,dx\right] = \boxed{12\pi}$$

6.2 Volumes Using Cylindrical Shells

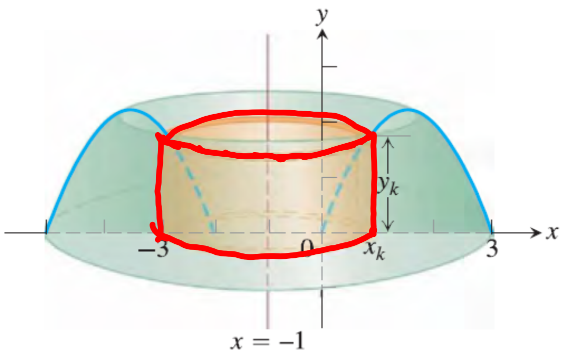
Slicing with Cylinders

EXAMPLE 1 The region enclosed by the x-axis and the parabola $y = f(x) = 3x - x^2$ is revolved about the vertical line $x = -1$ to generate a solid (Figure 6.16). Find the volume of the solid.

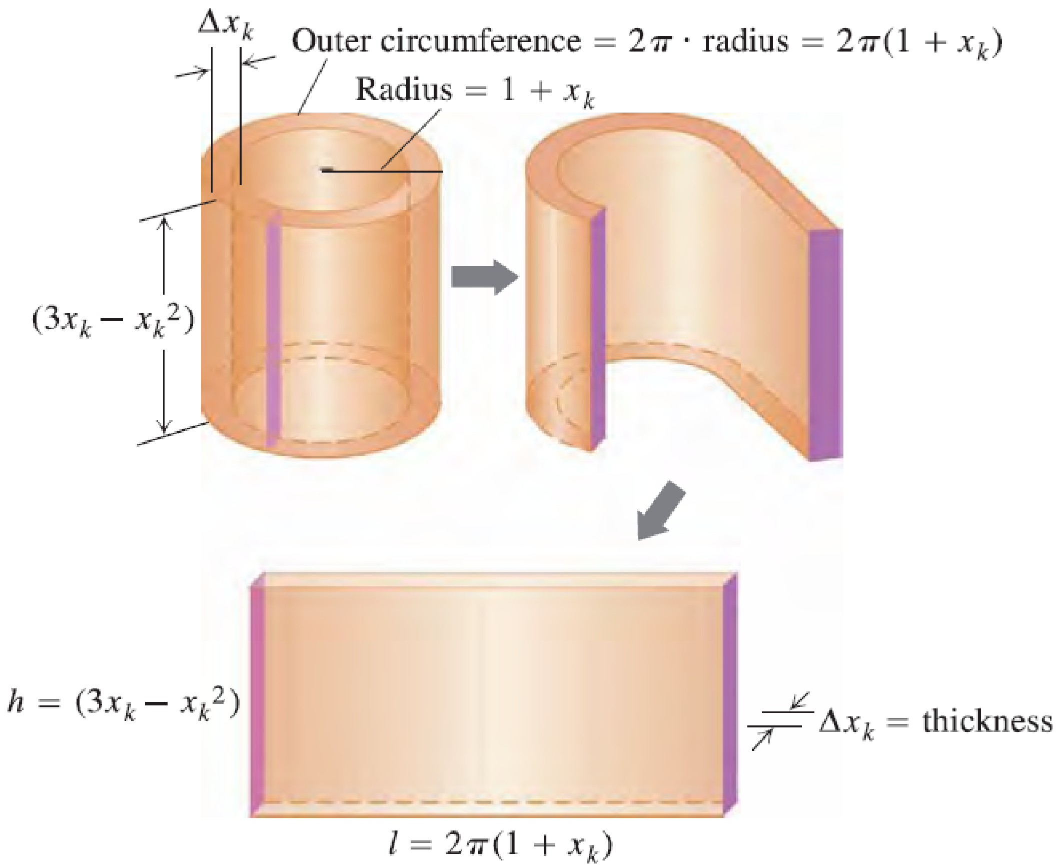


(a) (b)

إذا فكرنا بأخذ شريحة عرضية (Cross section) فإنه يلزمنا
أخذ خط متعامد على محور الدوران لتكوين القطاع العرضي هو قرص أو حلقة
في هذا المثال الخط المتعامد على محور الدوران يبدو أكثر تعقيداً.
لذلك سنفكر في عمل شريحة إسطوانية (ليست عرضية) بأخذ
خط يوازي محور الدوران، وحساب مساحة السطح وتكامله
على حركة الخط سينتج حجم الجسم الدوراني لطريقة جديدة تسمى
طريقة الشرائح الإسطوانية. (انظر المثال)



الرسم التوضيحي التالي يبين حجم الشريحة الإسطوانية



The Shell Method (Cylindrical formula)

Shell Formula for Revolution About a Vertical Line

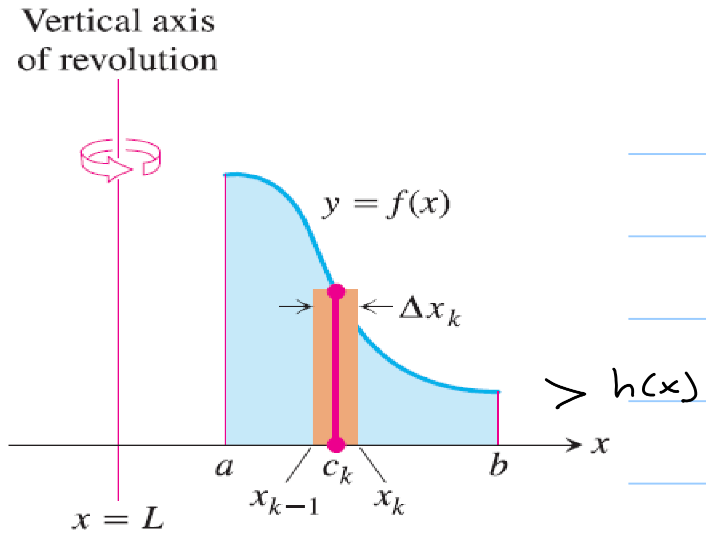
The volume of the solid generated by revolving the region between the x-axis and the graph of a continuous function $y = f(x) \geq 0, L \leq a \leq x \leq b$, about a vertical line $x = L$ is

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{shell} \\ \text{radius}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{shell} \\ \text{height}\end{pmatrix} dx. = \int_a^b 2\pi\, r(x)\, h(x)\, dx$$

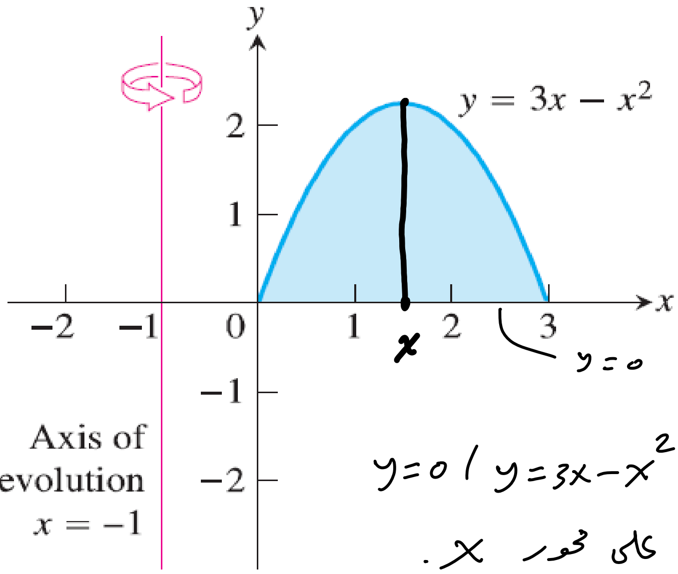
لإيجاد الحجم نرسم خط موازي لمحور الدوران داخل منطقة الدوران ونحدد مجال حركته ولدينا:

① Shell radius (نصف قطر الشريحة) := المسافة بين الخط الموازي لمحور الدوران وبين محور الدوران

② Shell height (ارتفاع الشريحة) := طول الخط الموازي لمحور الدوران.



إذا كان محور الدوران $y = L$ موازياً لمحور x ، نرسم خط موازي
لمحور x داخل منطقة الدوران وتحول المعادلات بدلالة y $(x = g(y))$
ويكون التكامل بدلالة y .



(بالعودة للمثال السابق)

الخط يوازي محور y والمعادلات هي $y = 3x - x^2$ / $y = 0$

حركة الخط داخل المنطقة من 0 إلى 3 على محور x .

نصف قطر وارتفاع الشيء يحجمها

$r(x) =$ المسافة بين الخط ومحور الدوران $= x - (-1) = x + 1$

$h(x) =$ طول الخط المرسوم $= (3x - x^2) - 0 = 3x - x^2$

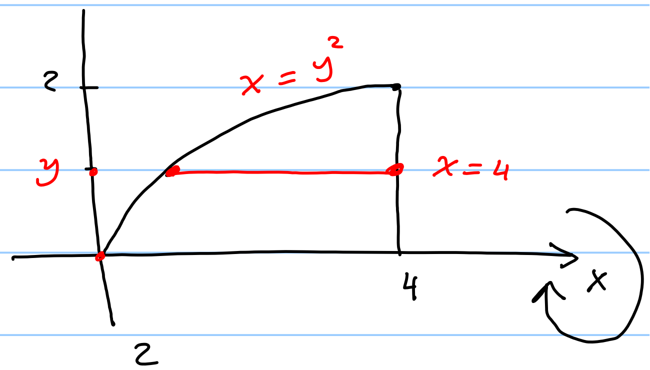
$$V = 2\pi \int_0^3 r(x)\, h(x)\, dx = 2\pi \int_0^3 (x+1)(3x - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 2x^2 + 3x - x^3\, dx = \frac{45}{2}\pi .$$

2) **(EXAMPLE 4)** The region between the curve $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find its volume.

sol: (تم حل السؤال بطريقة الشرائح أو القرص وكان الناتج 8π)

By using Cylindrical shell:



Shell radius $r(y) = y$

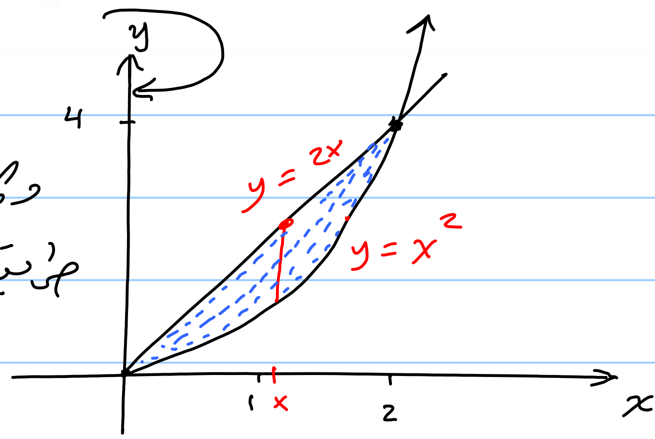
shell hight $h(y) = 4 - y^2$

$$V = 2\pi \int_0^2 y\,(4 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^2 4y - y^3\,dy$$

$$= 2\pi \left(2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{8\pi}.$$

3) **(EXAMPLE 10)** The region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

sol: تم حل السؤال باستخدام طريقة الحلقات وكان الناتج $\frac{8}{3}\pi$. سنقوم بحله باستخدام طريقة الشرائح الطولية .



Cylindrical shell:

- ارسم خط يوازي محور الدوران داخل المنطقة ونكتب المعادلات بالطريقة المناسبة .

(هنا نكتب المعادلات $y = 2x$, $y = x^2$)

- حركة الخط من 0 إلى 2 على محور x .

- $r(x) = x$, $h(x) = 2x - x^2$.

$$\therefore V = 2\pi \int_0^2 x\,(2x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3\,dx$$

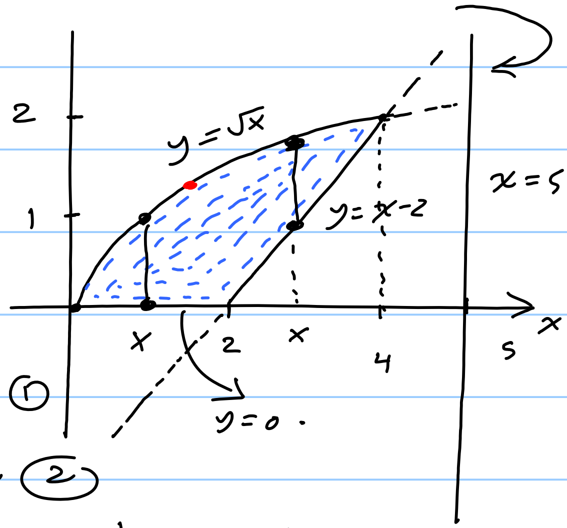
$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}\pi}.$$

4) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=\sqrt{x}$, x-axis, and $y=x-2$,

(i) about $x=5$. (ii) about $y=-1$.

sol: (i) تم حل السؤال بفرعيه في الفصل السابق (راجع sec 6.1)

سنقوم بحله باستخدام طريقة الشرائح الإسطوانية.



① ارسم منطقة الدوران وحدد محور الدوران

② ارسم خط موازي لمحور الدوران داخل منطقة الدوران وحدد مجال حركته.

③ اكتب المعادلات بالصيغة المناسبة وهي هنا $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=x-2$

④ حدد نصف قطر وارتفاع الشريحة الإسطوانية

$$r(x) = 5-x$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-0, & \text{if } 0 \le x \le 2. \\ \sqrt{x}-x+2, & \text{if } 2 < x \le 4. \end{cases}$$

$$\therefore V = 2\pi \int_0^4 r(x)\,h(x)\,dx$$

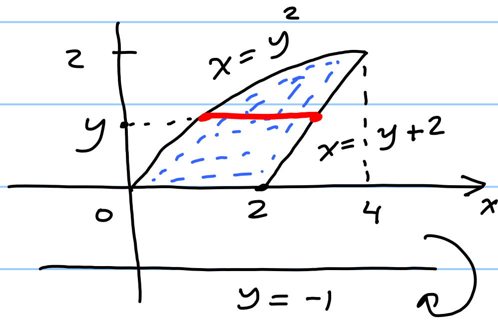
$$= 2\pi \left[\int_0^2 (5-x)\sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (5-x)(\sqrt{x}-x+2)\,dx \right] = \boxed{\frac{316}{15}\pi}$$

قارنه بالحل في sec 6.1 ستجد أن الحل في هذه الفرعية باستخدام طريقة Washer هو أسهل منه باستخدام طريقة الشرائح الإسطوانية. لأن الخط المعامد على محور الدوران لا يؤدي لتقسيم المنطقة.

ii) بنفس الخطوات في (i) مع كون محور الدوران $y = -1$

$r(y) = y - (-1) = y + 1$

$h(y) = (y+2) - y^2$



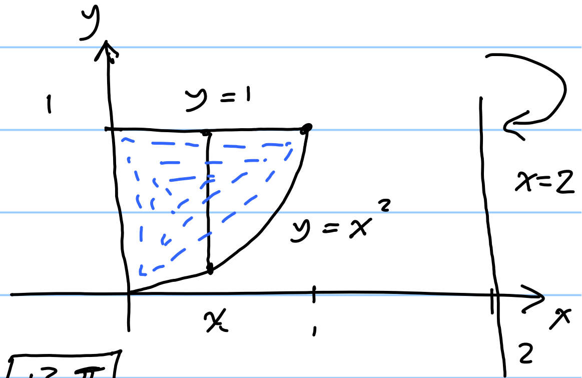
$$V = 2\pi \int_0^2 (y+1)(y+2-y^2)\, dy$$

$$= \boxed{12\pi}$$

قارن هذا الحل بالحل في sec 6.1 الذي يستخدم طريقة الشرائح ستجد أن الحل هنا أسهل / والسبب أن الخط الموازي لمحور الدوران لا يؤدي لتجزئة المنطقة.

الخلاصة: مقارنة طريقتي الشرائح الأسطوانية والحلقات من حيث السهولة يعتمد على الخط المرسوم داخل المنطقة. فإذا كان الخط العمودي على محور الدوران لا يؤدي لتجزئة التكامل بينما الموازي يجزئ التكامل تكون طريقة الحلقات أسهل، ويكون العكس بالعكس.

5) The region in the first quadrant bounded by the curves $y = x^2$, y-axis and $y = 1$ is revolved about $x = 2$ to generate a solid. Find its volume using the cylindrical shell and the washer method.



sol: <u>Cylindrical shell:</u>

$r(x) = 2 - x$, $h(x) = 1 - x^2$,

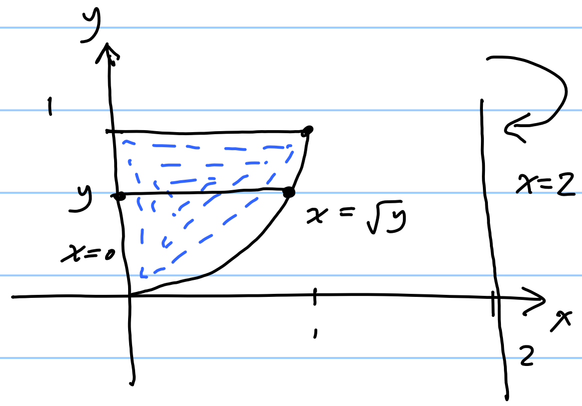
$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1-x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 2 - 2x^2 - x + x^3\, dx = \boxed{\frac{13}{6}\pi}$$

Washer Method:

$r(y) = 2 - \sqrt{y}$

$R(y) = 2 - 0$



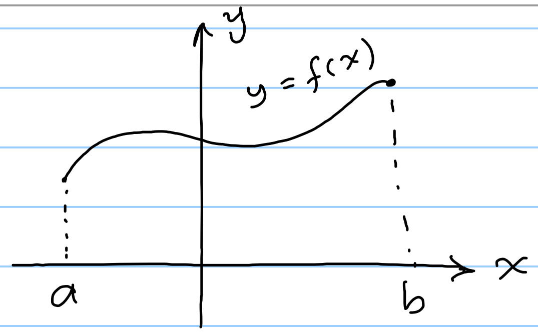
$$V = \pi \int_0^1 2^2 - (2-\sqrt{y})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 4 - 4 + 4\sqrt{y} - y \, dy = \pi \int_0^1 4\sqrt{y} - y \, dy$$

$$= \pi \left(4 \tfrac{2}{3} y^{3/2} - \tfrac{y^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{13}{6}\pi}$$

Exercise: Read Example 1 and 2 in sec 6.2 in book.

6.3 Arc Length



DEFINITION If f' is continuous on $[a, b]$, then the **length (arc length)** of the curve $y = f(x)$ from the point $A = (a, f(a))$ to the point $B = (b, f(b))$ is the value of the integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (3)$$

Remark: A fun with continuous derivative on $[a,b]$ is called smooth, and its curve is called smooth curve on $[a,b]$.

EXAMPLE 1 Find the length of the curve (Figure 6.24)

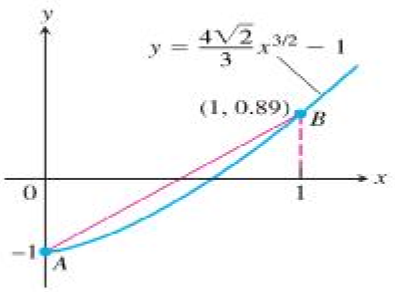
$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Sol: $f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$ which is continous on $[0,1]$. So

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_1^9 \sqrt{u}\, du = \boxed{\frac{13}{6}}$$

$u = 1 + 8x$
$du = 8\,dx$
$\frac{du}{8} = dx$
$x = 0 \longrightarrow u = 1$
$x = 1 \longrightarrow u = 9$



لاحظ أننا حصلنا على طول
المنحنى للدالة المرسومة

EXAMPLE 2 Find the length of the graph of

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \qquad 1 \le x \le 4.$$

Sol: $f' = \dfrac{3x^2}{12} - \dfrac{1}{x^2}$ which is continuous on $[1,4]$

Note that $1 + (f')^2 = 1 + \left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 = 1 + \dfrac{x^4}{16} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^4}$

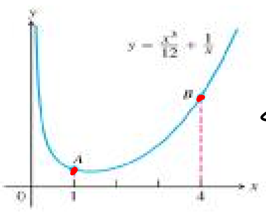
$$= \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

$\therefore$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (f')^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^4 \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x\right)$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\Big]_1^4 = \left(\frac{64}{12} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{72}{12} = \boxed{6}$$



المنحنى الذي أوجدنا طوله موضح بالرسمة

ملحوظة: إذا لم تكن المشتقة f' متصلة على الفترة $[a,b]$ أو كان التكامل باتجاه محور x صعب / فإنه قد يكون من الأنسب التعامل مع طول المنحنى بتكامله باتجاه y حسب النص التالي:

Formula for the Length of $x = g(y),\ c \le y \le d$

If g' is continuous on $[c, d]$, the length of the curve $x = g(y)$ from $A = (g(c), c)$ to $B = (g(d), d)$ is

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \qquad (4)$$

EXAMPLE 3 Find the length of the curve $y = (x/2)^{2/3}$ from $x = 0$ to $x = 2$.

Sol: $y' = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Note that y' is not continuous at $x = 0 \in [0,2]$, so f is not smooth curve. In this case, we can't use formula (3). So, we try to use the other formula in (4) above as follows:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow x = 2y^{3/2}.$$

When $x \in [0,2] \longrightarrow y \in [0,1]$

($[0,1]$ is the range of $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ when $[0,2]$ is the domain)

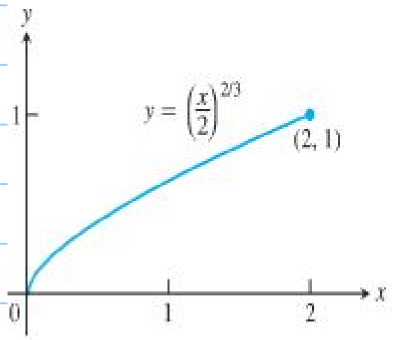
Now $\frac{dx}{dy} = 3\sqrt{y}$ which is continuous on $[0,1]$

Therefore, using formula (4), we get,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \simeq \boxed{2.27}$$

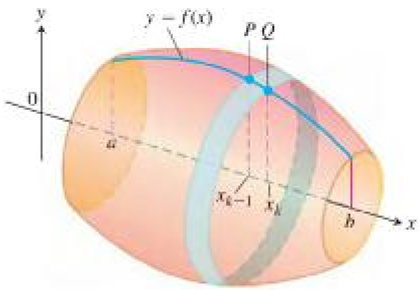
انظر الرسمة



ملحوظة: الرسم ليس شرطاً للحل وإنما يعطى للتوضيح.

Note Title ٢٣/٠١/٢٢

6.4 Area of Surfaces of Revolution



DEFINITION If the function $f(x) \geq 0$ is continuously differentiable on $[a, b]$, the **area of the surface** generated by revolving the graph of $y = f(x)$ about the x-axis is

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (3)$$

Surface Area for Revolution About the y-Axis

If $x = g(y) \geq 0$ is continuously differentiable on $[c, d]$, the area of the surface generated by revolving the graph of $x = g(y)$ about the y-axis is

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy. \qquad (4)$$

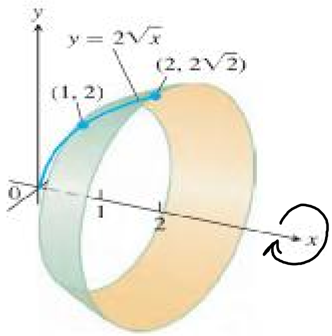
EXAMPLE 1 Find the area of the surface generated by revolving the curve $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, about the x-axis

Sol: $f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ which is cont. on $[1, 2]$. Moreover $f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in [1,2]$. So,

$$S = 2\pi \int_1^2 f(x)\sqrt{1+(f')^2}\, dx = 2\pi \int_1^2 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx = 4\pi \, \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

المنحنى $y=2\sqrt{x}$ على الفترة $[1,2]$ ، الجسم الدوراني الذي أوجدنا مساحة سطحه موضح من الرسمة التالية .



EXAMPLE 2 The line segment $x = 1 - y$, $0 \le y \le 1$, is revolved about the y-axis to generate the cone in Figure 6.35. Find its lateral surface area (which excludes the base area).

in book

sol:

clearly $x = f(y) = 1 - y \geq 0$ on $[0,1]$. Moreover $\frac{dx}{dy} = -1$ is cont. on $[0,1]$. So the surface area of the cone is

$$S = 2\pi \int_0^1 f(y)\sqrt{1 + f'(y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^1 (1-y)\sqrt{1 + (-1)^2}\, dy$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi \left(y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\sqrt{2}\,\pi}$$

الرسمة التالية توضح الجسم الدوراني Cone الذي نتج من دورانه القطعة المستقيمة $x = 1 - y$ ، $y \in [0,1]$ حول محور y .